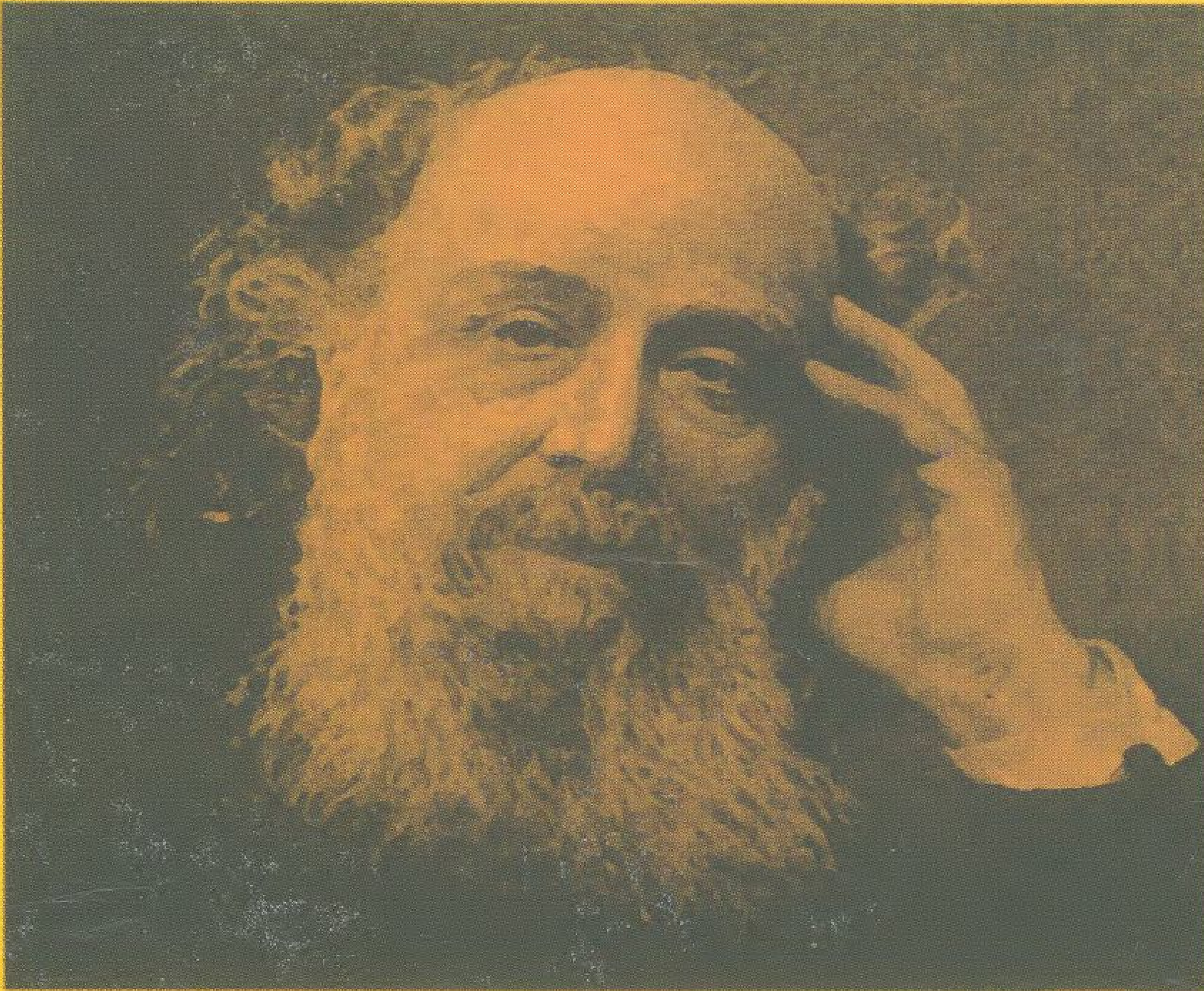
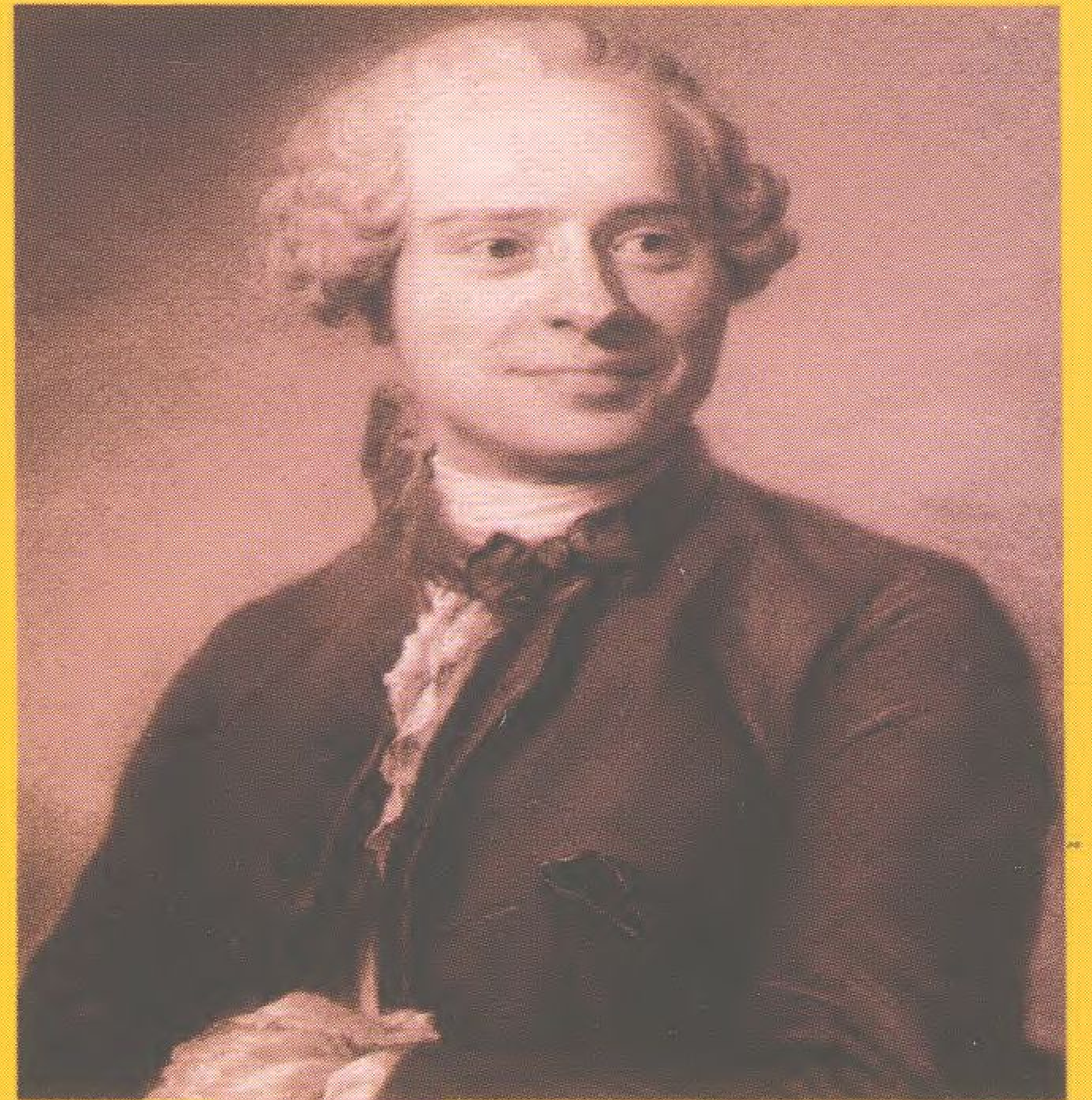
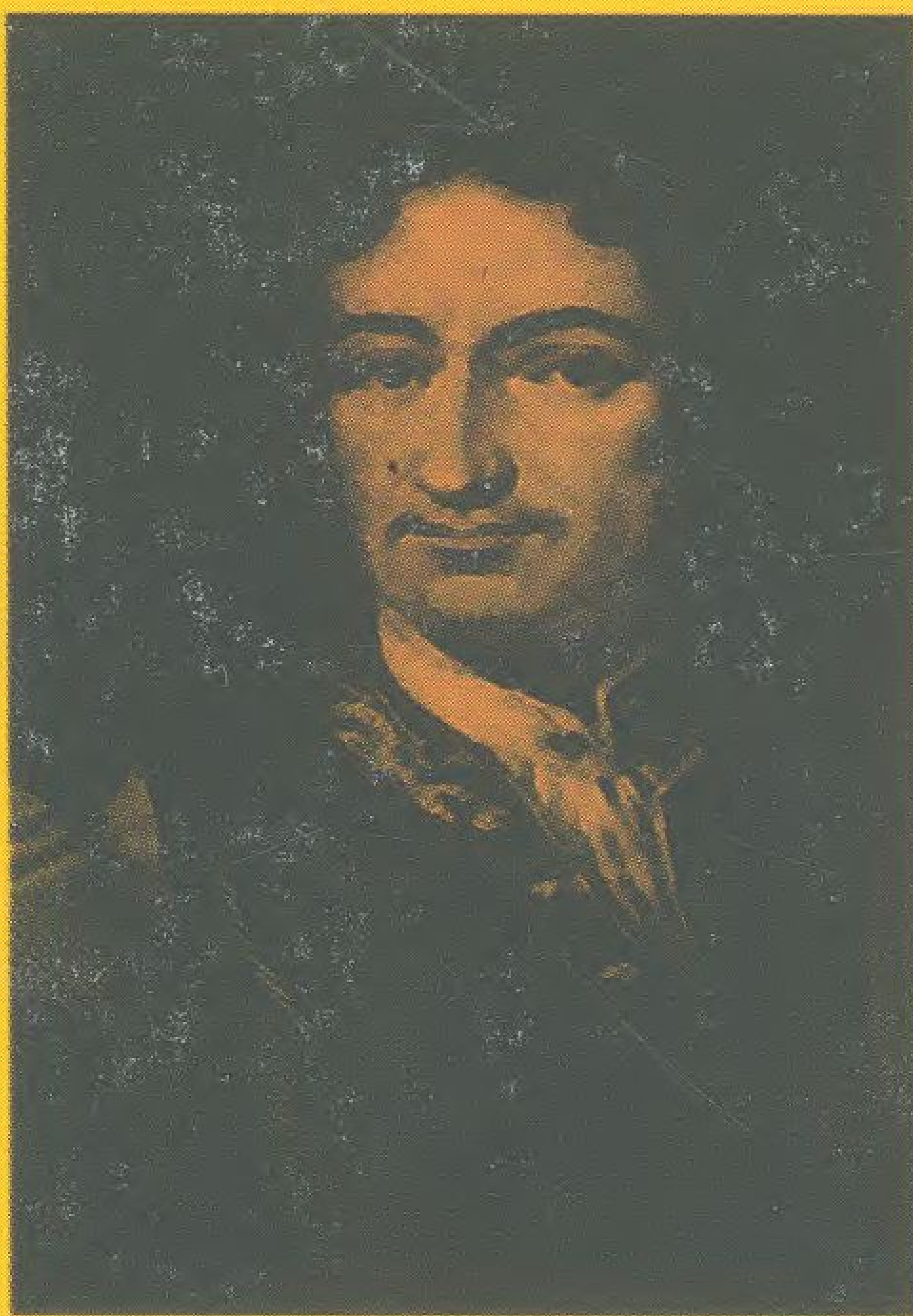
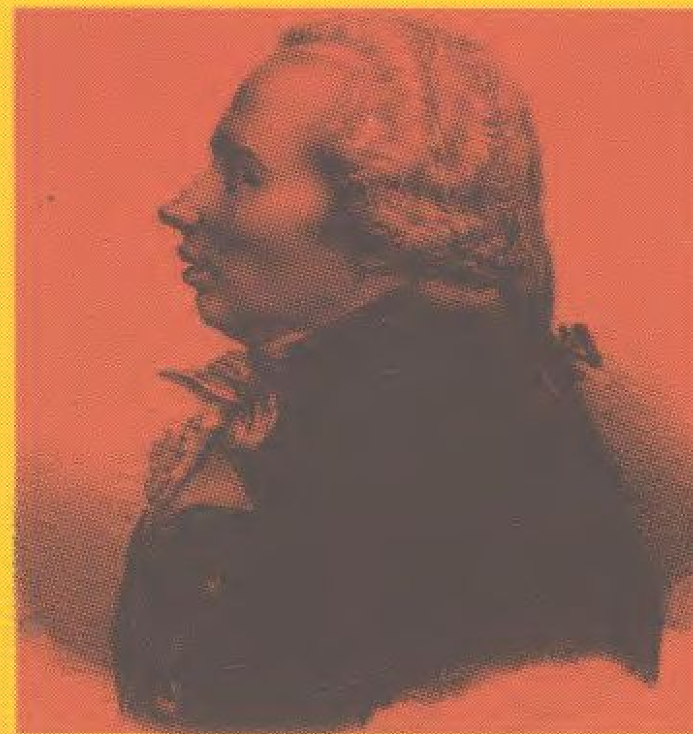


ديرك ج ستروك

موجز تاريخ الرياضيات






ترجمة

د. عبداللطيف الصديقي



ديرك ج. ستروك

موجز
تاريخ الرياضيات

ترجمة
د. عبد اللطيف الصديقي



منشورات دار علاء الدين

- **موجز تاريخ الرياضيات.**
- **تأليف: ديرك ج. ستروك.**
- **ترجمة: د. عبد اللطيف الصديقي.**
- الطبعة الأولى 2010.
- عدد النسخ /1000/ نسخة.

- تمت الطباعة في دار علاء الدين للنشر.

دار علاء الدين

للنشر والتوزيع والترجمة

سورية، دمشق، ص. ب: 30598

هاتف: 5617071، فاكس: 5613241

البريد الإلكتروني: ala-addin@mail.sy

المحتويات

القرن الثامن عشر

القرن التاسع عشر

توطئة
بقلم المترجم

إن تاريخ الرياضيات هو في واقع الأمر تاريخ الإنسانية بأسرها. وقد يمتد هذا التاريخ إلى أكثر من عشرة آلاف عام، وهو العمر المقدر للحضارة البشرية، فمنذ أن استطاع الإنسان الأول الوقوف على قدميه، واستخدم قبضة يديه، ودخل إلى الكهوف حرصاً على مقتنياته وخوفاً من أعدائه، ثم وضع بصماته على جدران الكهوف من خطوط ورسوم وغيرها، كل هذا ترك أثراً كبيراً في قدراته الرياضياتية. بدأ العد الأولي عند الإنسان باستخدام أصابع اليد قبل أكثر من ثلاثين ألف سنة؛ واستخدمت الألواح الطينية لرصد سجلات الحسابات عند البابليين قبل ثمانية آلاف سنة تقريباً؛ واستخدم المصريون القدماء الأعداد الهيروغليفية في تلك الفترة؛ كل هذا يعبر قدم فكرة العد. ولكن تاريخ النشاط الرياضياتي ما بعد فترة العد يعود إلى قرابة ألفي سنة ق.م، قادماً من مصر وبابل. ووصل ذروته عند الإغريق قبل أربعمئة سنة ق.م. ومر بمرحلة ركود دامت طويلاً بعد سقوط المجتمع الإغريقي، ولكن هذا النشاط بعث أخيراً على يد الباحثين العرب بعدما شيدت بغداد مع العام 750 م.

تكمن الصعوبة في الرياضيات في تنوعها ودرجة اختلافها من حقبة إلى أخرى، ومن منطقة إلى أخرى، لذا اتسم كل عصر وكل بقعة برياضيات تختلف أسلوباً وتفكيراً وصياغة، ومع هذا كله ظلت مع اتفاق تام وانسجام متناغم مع إشباع احتياجات وفضول الإنسان، لذا جاءت كل حضارة لتكون نسخاً وتراكماً لحضارات أخرى مهما امتدت رقعة هذه أو تلك.

إن الرياضيات هي المطلق بعينه؛ هي اللغة الكونية التي يستشعرها كل كائن مهما كان: حيواناً أم إنساناً؛ كل له درجته وأسلوبه في التعبير: إحساساً غريزياً كان أم لفظاً أو رمزاً؛ جميعها تعبر عن إرادة الكائن ورغبته في الاستمرار والبقاء.

تحاول هذه الصفحات التي بين يديك أيها القارئ الكريم أن ترسم بإيجاز تاريخ الرياضيات منذ بداياته. وقد لا تقرأ تاريخاً للرياضيات فحسب بل تاريخاً للمجتمعات التي أفرزت هذه الرياضيات. بمعنى آخر تاريخاً اجتماعياً واقتصادياً وسياسياً وغيرها. فالمؤلف هنا يأخذك في جولة إلى عمق التاريخ، ويستعرض لك الأحداث ويتتبعها، كي يعطيك المعلومة الرياضياتية، ويقترح ما يمكن اقتراحه، ثم يخرج لك الحقيقة الرياضياتية، وهنا تكمن متعة الكتاب للقارئ، ولكنها مشقة للمترجم الذي يفتقر الحس التاريخي، فأحياناً تجد نفسك أيها القارئ تقرأ تاريخاً خالصاً ولا تشعر بأنك إزاء تاريخ للرياضيات، وسرعان ما ينقلك بأسلوبه المتقن والسلس إلى رياضيات خالصة تجد نفسك تسبح في آفاقها تارة، وتغوص في أعماقها تارة أخرى، وهذه متعة أخرى نجدها عند كاتبنا، مما يحدو بنا إلى القول عن هذا الكتاب إنه أجمل تاريخ للرياضيات.

تنطلق الرياضيات من القاعدة القائلة عند الشرق "افعل كذا وكذا"، إلى الغرب الذي يأخذ بالبرهان الذهني ليجعل الحقيقة الرياضياتية قائمة على الدقة والصرامة المنطقية. فالبرهان العقلي هو الذي يجعل الحدث موضوعياً وأكثر شمولية، لذا يحتم على الرياضياتي المحترف أن يشق طريقة بهذه الآلة الحادة، وإلا كتب على فرضياته الفناء، "فالبراهين الرياضياتية" كما يقول الفيلسوف الإنجليزي جون لوك "شبيهة بالألماسات: صلبة وبراقة في آن، ولكن لا يمكن أن تُمَس إلا بالتفكر وحده". وقد نكون أيضاً جنباً إلى جنب مع الرياضياتي دي مورغان عندما تفوه ذات مرة: "إن الخيال هو القوة المحركة للإبداع الرياضياتي، وليس التفكر". هذا الخيال الرحب قادر على أن يقودنا إلى حقيقة يتم الإجماع عليها ثم تصبح واقعاً ملموساً له استخداماته وفنونه، وهذا ما يبرهن لنا أن الرياضيات بدأت من الواقع عند القدماء، إلى التجريد عند الإغريق وما بعد، إلى الواقع مرة أخرى على يد علماء الرياضيات التطبيقية.

ونختم تمهيدنا مع إسحاق أسيموف I.Asimov عندما قال: "الرياضيات هي منظور متميز للفكر الإنساني. وتاريخها يختلف جوهرياً عن بقية التواريخ الأخرى... والرياضيات هي الوحيدة التي لا يوجد فيها تصويبات، بل توسيعات (امتدادات)".

د. عبد اللطيف الصديقي
قسم الرياضيات - كلية العلوم جامعة البحرين - البحرين

مقدمة المؤلف

1

الرياضيات مغامرة ضخمة من الأفكار. وتاريخها يعكس جزءاً من الأفكار السامية لأجيال لا تحصى. ومن الممكن أن نحصر هذا التاريخ في مئتين أو ثلاثمئة صفحة، ونحشر أنفسنا في مجال محدد فقط، ومن ثم ندّون الأفكار الرئيسة البينة مع تقليل المصادر إلى تطورات أخرى. تم حصر تفاصيل هذه المراجع في عناوين عريضة، وأكثر مؤلفيها معروفون نسبياً- تم تجاوز بعضهم مثل: روبرفال و لمبرت و شفارتز - وقد تكون أكثر القيود - أو بالأحرى العوائق - سوءاً قلة المصادر اللازمة للأوساط الثقافية والاجتماعية التي ازدهرت فيها الرياضيات.

تأثرت الرياضيات بالزراعة والتجارة والصناعة والحروب والهندسة والفلسفة والفيزياء والفلك. فكان تأثير الهيدروليك في نظرية الدوال، وفي التصور الكانتي للهندسة والكهرومغناطيسية، وفي المعادلات التفاضلية والكارتيزية، وفي الميكانيك والسكولاتية، وفي حساب التفاضل والتكامل، كل هذا يعبر عنه بعبارات قليلة، أو بالأحرى بكلمات قليلة. ومن ثم فإن فهم مسار مضمون الرياضيات يمكن الوصول إليه فقط إذا ما تم تحديد هذه العوامل وأخذها بالحسبان. حتى مصادر الأدبيات لابد أن تخضع هي الأخرى إلى تحليل تاريخي. وتنتهي قصتنا مع عام 1900 تقريباً، لذا فإننا نشعر أن رياضيات العقود الأخيرة للقرن العشرين لها أوجه كثيرة ومن ثم مستحيلة - على حد علم المؤلف - وكي ننصف إلى الاتجاهات الرئيسة.

وعلى الرغم من هذه القيود استطعنا أن نعطي وصفاً عادلاً وأميناً للاتجاهات الرئيسة من تطور الرياضيات عبر العصور، وكذلك الأوضاع الثقافية والاجتماعية التي أخذت مكانها، فاختيار المواضيع لم يكن بالطبع قائماً على وجه الحصر على العوامل

الموضوعية، ولكن من محض إرادة المؤلف؛ أي ما يرغب أو لا يرغب معرفته أو عدم معرفته. ولم يكن الرجوع دائماً إلى المصادر المجهولة بالنسبة له ممكناً، وغالباً ما يكون لتلك التي تم استخدامها للمرة الثانية أو الثالثة حتى. إذاً إنها إشارة جيدة، ليست لهذا الكتاب فحسب، بل بالنسبة لجميع المصادر التاريخية. ولكي يمكن تفحص العبارات مثلاً من المصادر الأصلية، وهو في حد ذاته مبدأ جيد لأكثر من سبب، من هذه الأسباب معرفتنا بمؤلفين مثل إقليدس و ديوفانتس و ديكارت و لابلاس و غاوس و ريمان. فهؤلاء يجب الوصول إليهم عن طريق مقتطفات وتواريخ تصف أعمالهم، حيث هناك قوة حية في المصادر الأصلية لإقليدس أو غاوس، كما هو الوضع مع شكسبير. وهناك مواقف مشوقة لأرخميدس و فيرما و جاكوبي، كما هي مع هوراس Horace و إميرسون Emerson.

ومن ضمن الأهداف التي قادت المؤلف أن يعرض هذه الموضوعات ما يلي:

1- توكيد استمرارية وصلة الحضارات الشرقية بدلاً من التقسيم الآلي بين الثقافات المصرية والبابلية والصينية والهندية والعربية.

2- التمييز بين الحقيقة القائمة والفرضية والتقاليد، ولا سيما رياضيات الإغريق.

3- ربط اتجاهي رياضيات النهضة: الحسابي - الجبري و "حساب التفاضل والتكامل" بالمصالح التجارية والهندسية لتلك الفترة.

4- تأسيس دراسة رياضيات القرن التاسع عشر على الأفراد والمدارس الفكرية بدلاً من الموضوعات (ويمكن استخدام تاريخ فليكس كلاين F.Klein باعتباره نموذجاً أولياً، فالدراسات القائمة على الموضوعات يمكن إيجادها في مؤلفات كاجوري Cajori وبل Bell، أو بشيء من التفاصيل الفنية في: Encyklopædie der Mathematischen Wissenschaften [24 vols, Leipzig, 1898-1935] ومؤلفات باسكال Repertorium der höheren Mathematik [5 vol., Leipzig, 1910-1929]

2

ندرج هنا قائمة بأهم الكتب المتعلقة بتاريخ الرياضيات بوجه عام. وقد أخذت هذه القائمة من ملحق لكتاب G.Sarton, The Study of the History of Mathematics (Cambridge, 1936) والذي يحتوي ليس على مقدمة مشوقة فحسب، بل معلومات

Archibald, R. C. *Outline of the History of Mathematics*, 6th ed., rev. and enlarged. Math. Assoc. of America, 1949. (An excellent 114-page summary with many bibliographic references.)

Cajori, F. *A History of Mathematics*, 2nd ed. New York, 1938. (A standard text of 514 pp.)

Smith, D. E. *History of Mathematics*. 2 vols., Boston, 1923. Dover reprint, 2 vols., 1958. (Restricted mainly to elementary mathematics, but has references concerning all leading mathematicians. Many illustrations.)

Bell, E. T. *Men of Mathematics*. Pelican Books, 1953. Also, E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, 2nd ed. New York and London, 1945. (These books contain a wealth of material on mathematicians and their works. The emphasis of the second book is on modern mathematics.)

Scott, J. F. *A History of Mathematics from Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century*. London, 1958.

Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York, 2nd ed., 1964.

Turnbull, H. W. *The Great Mathematicians*. London, 1929; new ed., New York, 1961. (Also in Newman, J. R., *The World of Mathematics*, Vol. 1, New York, 1956.)

Hofmann, J. E. *The History of Mathematics*. New York, 1957. (Trans. from the original German edition, Vol. I; see reference on p. 4. Vols. 2 and 3 of the German edition are translated as *Classical Mathematics*, New York, 1959.)

Dealing mainly with elementary mathematics are:

Sanford, V. *A Short History of Mathematics*. London, 1930.

Cajori, F. *A History of Elementary Mathematics*. New York, 1896, 1917.

Ball, W. W. Rouse. *A Short Account of the History of Mathematics*, 6th ed. London, 1915. Dover reprint, 1960. (An older, very readable, but antiquated text.)

The standard work on the history of mathematics is still:

Cantor, M. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. 4 vols., Leipzig, 1880–1908. [This enormous work, of which the fourth volume was written by a group of specialists under Cantor's direction, covers the history of mathematics until 1799. It is antiquated in many places (especially on Oriental mathematics), but remains a good book for first orientation. Corrections by G. Eneström *et al.* in the volumes of *Bibliotheca mathematica*.]

Other German books are:

Zeuthen, H. G. *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. 1st ed., Copenhagen, 1896; French ed., Paris, 1902; 2nd ed. revised by O. Neugebauer, Copenhagen, 1949.

Zeuthen, H. G. *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*. Leipzig, 1903.

Günther, S., and Wieleitner, H. *Geschichte der Mathematik*. 2 vols., Leipzig: Vol. I (by Günther), 1908; Vol. II, 2 parts (by Wieleitner), 1911–21. Ed. by Wieleitner, Berlin, 1939.

Tropfke, J. *Geschichte der Elementar-Mathematik*, 2nd ed. 7 vols., Leipzig, 1921–24. (Vols. I–IV in 3rd ed., 1930–40.)

Die Kultur der Gegenwart. 3 vols., Leipzig-Berlin, 1912. (Contains: Zeuthen, H.G., *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter*; Voss, A., *Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur*; Timerding, H. E., *Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung.*)

Becker, O., and Hofmann, J. E. *Geschichte der Mathematik.* Bonn, 1951.

Hofmann, J. E. *Geschichte der Mathematik.* 3 vols., Berlin, 1953–57. English trans., New York, 1957. (Vol. 1, 2nd. ed., Berlin, 1963.)

These two books contain extensive bio-bibliographies.

Becker, O. *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.* Freiburg-Munich, 1954.

Kowalewski, G. *Grosse Mathematiker.* Munich-Berlin, 1938.

The oldest textbook on the history of mathematics in French:

Montucla, J. E. *Histoire des mathématiques.* 4 vols., Paris, 1799–1802. New reprint, 1960. (Deals also with applied mathematics. First published in 1758, 2 vols., but is still good reading.)

Also in French:

d'Ocagne, M. *Histoire abrégée des sciences mathématiques, ouvrage recueilli et achévé par R. Dugas.* Paris, 1952. (Gives short sketches of persons.)

Dedron, J., and Itard, J. *Mathématiques et mathématiciens.* Paris, 1959. (Many illustrations.)

In Italian:

Loria, G. *Storia delle matematiche.* 3 vols., Turin, 1929–33.

Caruccio, E. *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo.* Turin, 1958.

In Russian:

Rybnikov, K. A. *Istoriya mathematiki.* 2 vols., Moscow, 1960–63.

There also exist anthologies of mathematical works:

Smith, D. E. *A Source Book in Mathematics.* London, 1929. Dover reprint, 2 vols., 1959.

Wieleitner, H. *Mathematische Quellenbücher.* 4 vols., Berlin, 1927–29.

Speiser, A. *Klassische Stücke der Mathematik.* Zürich-Leipzig, 1925.

Newman, J. R. *The World of Mathematics.* 4 vols., New York, 1956. (An anthology of essays by mathematicians on mathematics.)

Also useful is:

Callandrier, E. *Célèbres problèmes mathématiques.* Paris, 1949.

There also exist histories of special subjects, of which we must mention the following:

Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers.* 3 vols., Washington, 1919–27.

Muir, T. *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development.* 4 vols., London, 1906–23. Dover reprint, 4 vols. as 2, 1960. Supplement, *Contributions to the History of Determinants 1900–20*, London, 1930.

von Braunmühl, A. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* 2 vols., Leipzig, 1900–03.

Dantzig, T. *Number: The Language of Science*, 3rd ed. New York, 1943; also, London, 1940.
Coolidge, J. L. *A History of Geometrical Methods.* Oxford, 1940. Dover reprint, 1963.
Loria, G. *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, 4th ed. Turin, 1931.
——. *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri.* Milan, 1921.
——. *Curve piani speciali algebriche e transcendenti.* 2 vols., Milan, 1930. German ed., previously published, 2 vols., Leipzig, 1910–11.
Cajori, F. *A History of Mathematical Notations.* 2 vols., Chicago, 1928–29.
Karpinski, L. C. *The History of Arithmetic.* Chicago, 1925.
Walker, H. M. *Studies in the History of Statistical Methods.* Baltimore, 1929.
Reiff, R. *Geschichte der unendlichen Reihen.* Tübingen, 1889.
Todhunter, I. *History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century.* Cambridge, 1861.
——. *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge, 1865.
——. *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace.* 2 vols., London, 1873. Dover reprint, 2 vols. as 1, 1962.
Coolidge, J. L. *The Mathematics of Great Amateurs.* Oxford, 1949. Dover reprint, 1963.
Archibald, R. C. *Mathematical Table Makers.* New York, 1948.
Dugas, R. *Histoire de la mécanique.* Neufchatel, 1950. Also see *Mathematical Reviews*, Vol. 14 (1953), pp. 341–43.
Boyer, C. *History of Analytic Geometry.* New York, 1950.
Boyer, C. *History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York, 1949. Dover reprint, 1959.
Beth, E. W. *Geschiedenis der logica.* The Hague, 1944.
Markuschewitz, A. I. *Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen.* Berlin, 1955 (trans. from the Russian).
Bourbaki, N. *Éléments d'histoire des mathématiques.* Paris, 1960. (A collection of historical notes from *Elements de Mathématiques*; Paris, 1939–present.)

The history of mathematics is also discussed in the books on the history of science in general. The standard work is:

Sarton, G. *Introduction to the History of Science.* 3 vols., Washington-Baltimore, 1927–48. (This leads up to the fourteenth century and can be supplemented with Sarton's essay, *The Study of the History of Science, with an Introductory Bibliography*, Cambridge, 1936; Dover reprint, 1957. See also Sarton's book mentioned above.)

A good text for school use is:

Sedgwick, W. T., and Tyler, H. W. *A Short History of Science*, 3rd ed. New York, 1948.

The cultural influence of mathematics is the topic of the following work:

Kline, M. *Mathematics in Western Culture.* New York, 1953.

Also useful are:

Miller, G. A. "A First Lesson in the History of Mathematics," "A Second Lesson," etc., a series of ten articles in *National Math. Mag.*, Vols. 13–19 (1939–45).

The following periodicals deal with the history of mathematics (or of science in general):

Archiv für die Geschichte der Mathematik, 1909–31.
Bibliotheca mathematica, Ser. 1–3, 1884–1914.
Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, 1931–38.
Scripta mathematica, 1932–present.
Isis, 1913–present.
Revue d'histoire des sciences, 1947–present.
Archives internationales d'histoire des sciences, 1947–present.
Archive for the History of Exact Sciences, 1960–present.
Centaurus, 1950–present.
Archeion, 1919–present.
Istoriko-matematičeski Issledovaniya, 1948–present.
Boethius, 1962–present.
Physis, 1959–present.

الفصل الأول

البدايات



يعود تاريخ تصورنا للعدد والشكل إلى عصور سحيقة في القدم، ربما إلى العصر الحجري القديم Paleolithicum. وقبل مئات من السنين أو أكثر من ألف عام لهذه الفترة كان البشر يعيشون في الكهوف تحت ظروف تختلف نوعاً ما عن الحيوانات. وكان جلّ شأنهم وطاقاتهم الأساسية مركزةً حول العمليات البدائية لجمع الطعام أينما وجد. صنعوا الأسلحة للصيد ولصيد الأسماك، وطوروا اللغة للتخاطب فيما بينهم. ومع نهاية العصور الحجرية القديمة ازدهرت حياتهم بأشكال من الفنون الخلاقة من تماثيل ورسومات. إن الرسوم الموجودة في كهوف فرنسا وأسبانيا (ربما تمتد إلى 15000 سنة خلت) قد يكون لها معنى طقسياً. وبالطبع هي تكشف عن فهم رائع لمفهوم الشكل.

كان هناك تقدم طفيف بدأ يأخذ دوره في فهم القيم العددية والعلاقات المكانية، حتى أدى هذا إلى ظهور تحول من مجرد جمع الغذاء فحسب إلى الإنتاج الفعلي من الصيد إلى الزراعة. ومع هذا التغير الأساسي تحولت الثورة من الموقف السلبي للإنسان تجاه الطبيعة إلى الموقف النشط، وبذا ندخل عصراً حجرياً جديداً؛ إنه العصر الحجري الجديد Neolithicum.

يعود هذا الحدث العظيم في تاريخ البشرية إلى عشرة آلاف سنة خلت بعدما ذاب الجليد الذي كان يغطي أوروبا وآسيا، مما أتاح الفرصة للغابات والصحاري بالنشوء. وأخذ التنقل البدوي للبحث عن الطعام يتباطأ نحو النهاية، وحل المزارعون البدائيون محل صيادو الأسماك والصيادون على نطاق أوسع. بقي هؤلاء المزارعون في مكان واحد ما دامت التربة

خصبة؛ وبدأت المساكن الدائمة تأخذ مكانها، وهكذا نشأت القرى باعتبارها مأوى وحماية من الأجواء ومن القناصين الأعداء. لقد تم التنقيب عن الكثير من مستوطنات هذا العصر الحجري الجديد. وكشفت الآثار عن كيفية تطور الحرَف البدائية تدريجياً: مثل صناعة الفخار والنجارة والغزل والنسيج. كانت هناك مخازن للحبوب يتزود بها المقيمون في الشتاء والأوقات العصيبة. وقد وضعت هذه بكميات كبيرة وفائضة. وصنع الخبز، وخمرت البيرة. ومع نهاية هذا العصر الجديد بدأت عمليات صهر النحاس والبرونز وتحضيرهما. بدأت الاختراعات تأخذ مكانها، وعلى وجه التحديد عجلة الفخار وعجلة العربات؛ وتطورت القوارب والمساكن. وكل هذه الابتكارات المدهشة حدثت في منطقة واحدة، ولم يكتب لها دائماً أن تنتشر إلى مناطق أخرى. فعلى سبيل المثال: الهندي الأمريكي لم يتعلم أكثر عن الاستخدامات الفنية لعجلة العربات إلا عندما جاء الرجل الأبيض. ومع ذلك، بالمقارنة مع العصور الحجرية، فإن الدافع لهذا التطور الفني كان رائعاً ومطرداً.

وجدت التجارة بين القرى ذات الشأن. وأخذت تتوسع، مما ولد ضرورة رسم الاتصالات بين الأماكن التي تبعد عن بعضها مئات الأميال. لقد حفّز اكتشاف فنون صهر وصناعة النحاس أولاً، ثم الأدوات والأسلحة البرونزية، النشاط التجاري. وهذا بالتالي طوّر ودفع بارتقاء تشكل اللغات، وأخذت مفردات هذه اللغات تعبّر عن الأشياء بشكل دقيق ومحدد. ومن هنا برزت بعض من التجريدات، ولكن بقي دائماً مجال لبعض المفردات العددية البسيطة، ومجال آخر لعلاقات الشكل. كانت الكثير من القبائل الأسترالية والأمريكية والأفريقية في هذه المرحلة تعتبر بداية احتكاكهم مع الرجل الأبيض، ولكن لا تزال هناك بعض القبائل تعيش أوضاعاً تحتاج للدرس ومعرفة عاداتها وأسلوب تعبيرها.

2

يعد التعبير عن بعض المفردات العددية "أكثر الأفكار تجريداً، والتي بإمكان العقل البشري أن يشكلها" على حد تعبير آدم سميث - تأتي ببطء في الاستخدام - تظهر أولاً بصورة نوعية بدلاً من صورة كمية، وتجعل التميز بين واحد واثنين وكثير فقط (أو بصورة أفضل رجل ما بدلاً من رجل واحد).

لا تـزال أصـول التـصورات العدديـة النوعيـة القديمـة قابلـة للكـشف عنهـا بمفـردات ثنائيـة خاصـة موجـودة في لغـات معينـة، كاللغـة اليونانيـة والسلتية Celtic. فعنـدما تم تعمـيم فكـرة العـدد، فـإن أعـداداً أكـبر تم صـوغها أولاً بعمليـة الجمـع، فمثلاً: العدد 3 ناتج عن إضافة العددين 1 و 2 و 4 بإضافة 2 و 2 و 5 بإضافة 2 و 3.

لدينا هنا مثال من بعض القبائل الأسترالية:

نهـر مـوري **Murray**: إنيـا=1، بيتجفـال=2، بيتجفـال-إنيـا=3، بيتجفـال بيتجفال=4.

كاميلاروي **Kamilaroi**: مـال= 1، بـولان= 2، غوليبـا= 3، بـولان بـولان =4، بولان غوليبا= 5، غوليبا غوليبا=6[1]

لقـد حفـز تطـور الحـرف اليدويـة والتجـارة علـى بلـورة مفهـوم العـدد، فالأعـداد كانـت ترتـب وتحـزم إلى وحـدات أكـبر، وغالبـاً مـا تـستخدم أصـابع اليـد أو كلتـا اليـدين، وهــي عمليـة متداولـة في التجـارة. أدى هـذا أولاً إلى الأسـاس خمـسة، ثـم الأسـاس عشرة، وتكتمل بالجمـع أو بالطرح أحيانـاً، فمـثلاً يمكـن تـصور العـدد 12 عبـارة عـن 2+10، أو 9 عبـارة عـن 1-10، والعـدد 20 عبـارة عـن عـدد أصـابع اليـدين والقدمين، ولذا تم اختياره كأساس.

درس إيلس W.C.Eels 307 أنظمة عددية للشعوب الأمريكية البدائيـة. واتـضح لـه أن 146 منهـا عـشرياً و 106 خماسـياً وخماسـياً عـشرياً وعـشروني وخماسـي عـشروني[2]. وتجـدر الإشـارة هنـا إلى أن النظـام العـشروني ظهـر بـصورته المميـزة عنـد شعوب المايا بالمكسيك والسلتين في أوروبا.

كانت تُحفظ السجلات العددية عن طريق حـزم أو رزم وأثـلام علـى العـصي، وعقـد على الحبال، وحصوات وصدف ترتب على هيئة أكوام خماسية - أدوات شبيهة في العصور القديمـة بـصاحب الحانـة وعصيه المثلومـة[3] - والانتقـال مـن هـذا الأسـلوب إلى تقـديم الرمـوز

1- L.Conant, The Number Concept (New York, 1896), pp. 106-07

والكثيـر مـن الأمثلـة المشابهة نـورد اللفـظ باللغـة الإنجليزيـة: إنيـا - enea، بيتجفـال- petcheval، مال - mal، بولان - bulan، غوليبا - guliba.

2- W.C.Eels, "Number Systems of North American Indians" Amer.Math.Monthly, Vol. 20 (1913),pp.263-72,293-99; p.293.

3- عصا الحساب: عبارة عن عصا ذات أسنان أو أثلام تمثل أعداداً تبين مقدار الدين أو المبالغ المدفوعة

الخاصة مثل 5 و 10 و 20 وغيرها، يمكن اعتباره بمثابة خطوة فقط نحو الأمام. ونجد استخدام مثل هذه الرموز بالضبط مع بداية التاريخ المدوّن بما يعرف بفجر الحضارة.

يعود تاريخ أقدم استخدام لعصا الحساب إلى العصور الحجرية، حيث تم بالفعل العثور عليها عام 1937 في منطقة فيستو نيس Vêstonice (مورافايا Moravia). وكانت من عظم ذئب طوله سبع بوصات، حفر عليها 55 ثلمة عميقة، حيث رتبت الخمسة والعشرون الأولى في مجموعات خمس، تتبعها ثلمة بسيطة باعتبارها ضعف طول نهاية المتتالية، ثم البدء بثلمة أخرى، وهي ضعف المتتالية الجديدة، والتي تستمر حتى 30[1].

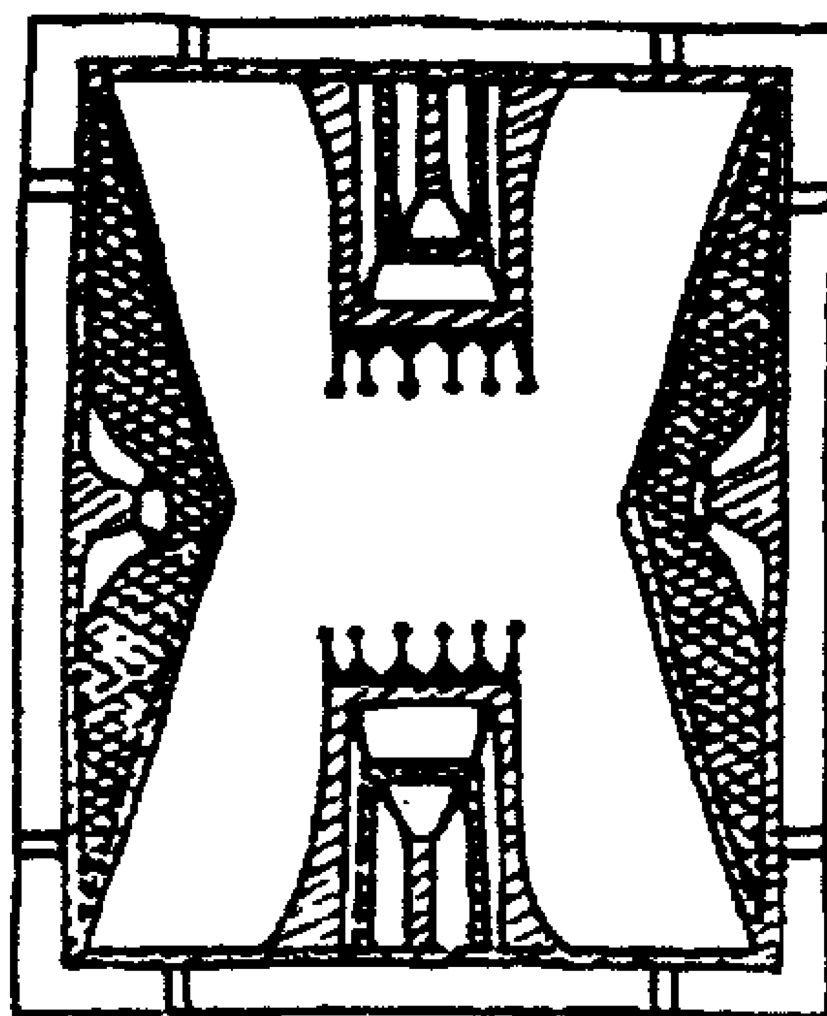
إذاً من الواضح، وتماشياً مع القول القديم الموجود في كتابات جاكوب غريم J.Grimm الذي غالباً ما يردد: "يبدأ العد بعد الأصابع"، وهذا بالطبع قول غير صائب، فالعد عن طريق الأصابع؛ أي بالخمسات أو العشرات جاء فقط في مرحلة معينة من التطور الاجتماعي. وعندها بدأ التعبير عن الأعداد بالاستناد إلى الأساس. وبالاستعانة بهذه الأعداد تم تشكيل الأعداد الكبيرة. ومن هنا بدأ النمط البدائي للحساب. وكان يعبر عن العدد 14 بـ 4+10 وأحياناً 15-1.

أخذ حاصل الضرب دوره عندما كان يعبر عن العدد 20 بـ 10×2 وليس 10+10. استخدمت هذه العمليات الزوجية [أي المكونة من زوج أو أثنين] من آلاف السنين باعتبارها نوعاً من منتصف الطريق بين عمليتي الجمع والضرب، وتحديداً في مصر وما قبل الحضارة الآرية في وادي الهندوس Indus لشعوب موهينجو - دارو Mohenjo-Daro. وبدأت عملية القسمة عندما كان يراد التعبير عن العدد 10 "بنصف الجسم"، رغم أن الوعي بتشكيل الكسور ظل غائباً. من بين قبائل أمريكا الشمالية مثلاً، هناك حالات نادرة معروفة بهذه الصياغة، فعلى الأرجح هناك $\frac{1}{2}$ فقط، وأحياناً $\frac{1}{3}$ أو $\frac{1}{4}$[2].

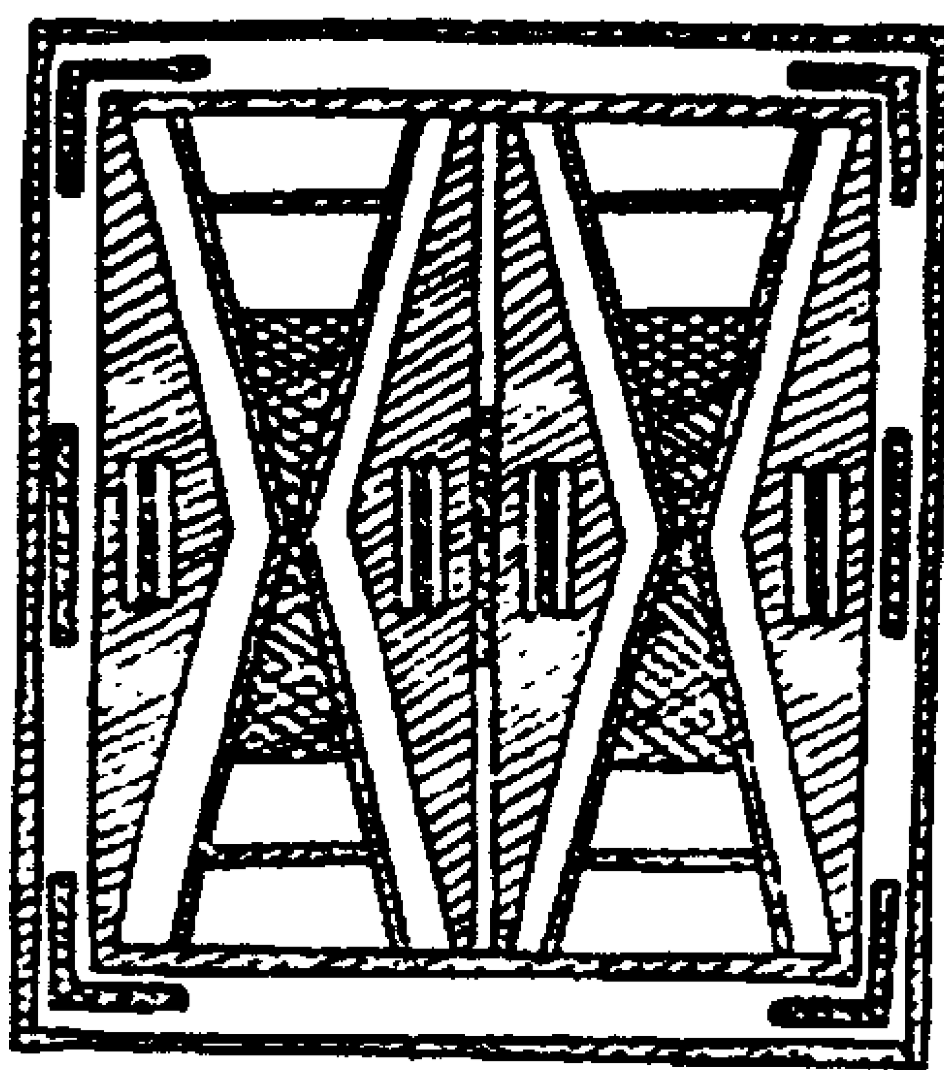
وكان الولع بالأعداد الكبيرة جداً الظاهرة اللافتة للنظر، وربما حفّز هذا الشوق رغبة الكثير من الناس في المبالغة عن القطعان المترامية الأطراف أو الأعداء القتلى.

1- Isis, Vol.28 (1938), pp. 462-63 (Illustrated London News, Oct, 2 1937).

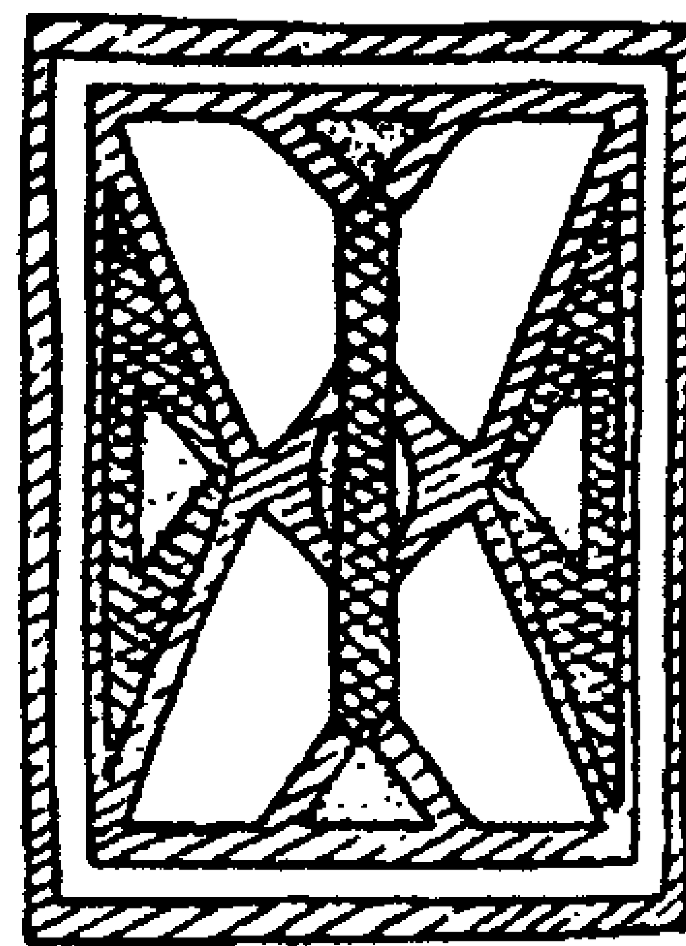
2- لقد اشار ميلر G.A.Miller الى ان كلمات مثل نصف one-half و semis و moitie ليس لها صلة مباشرة مع الكلمات two و duo و deux (بعكس الثلث والربع). مما يوضح ان مفهوم النصف قد بدا بصورة مستقلة عن العدد الصحيح. Nat.Math. Magazine, Vol. 13 (1939), p.272.



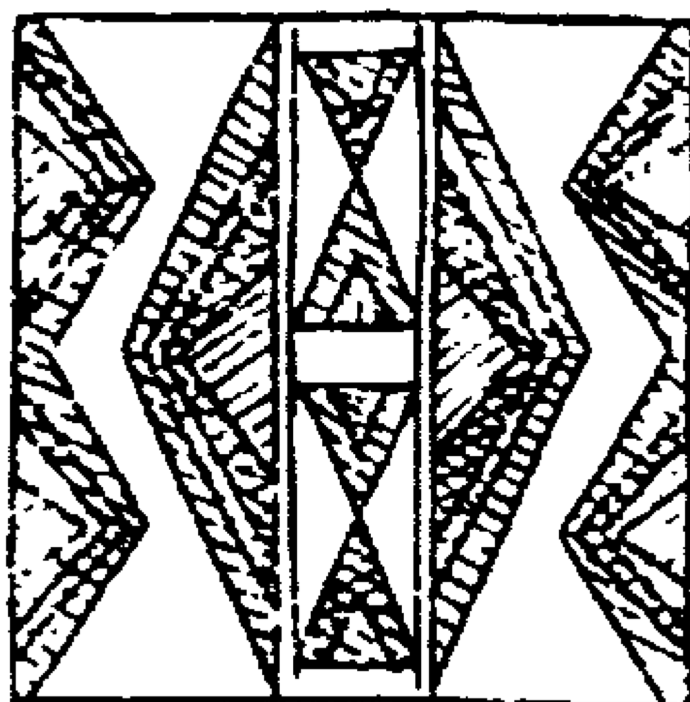
49 CHEYENNE



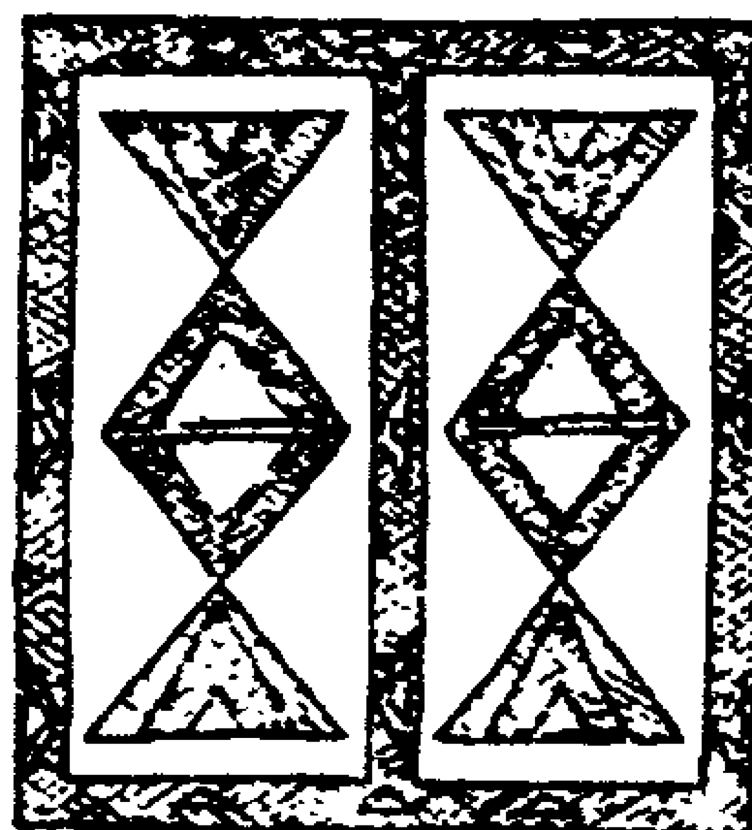
50* CHEYENNE

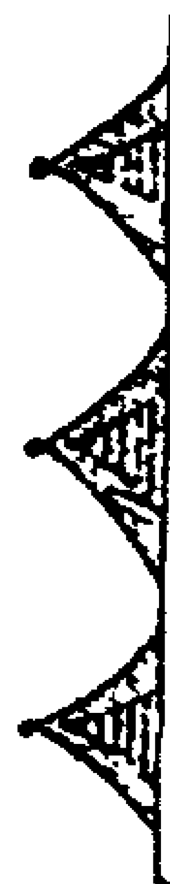


51* CHEYENNE

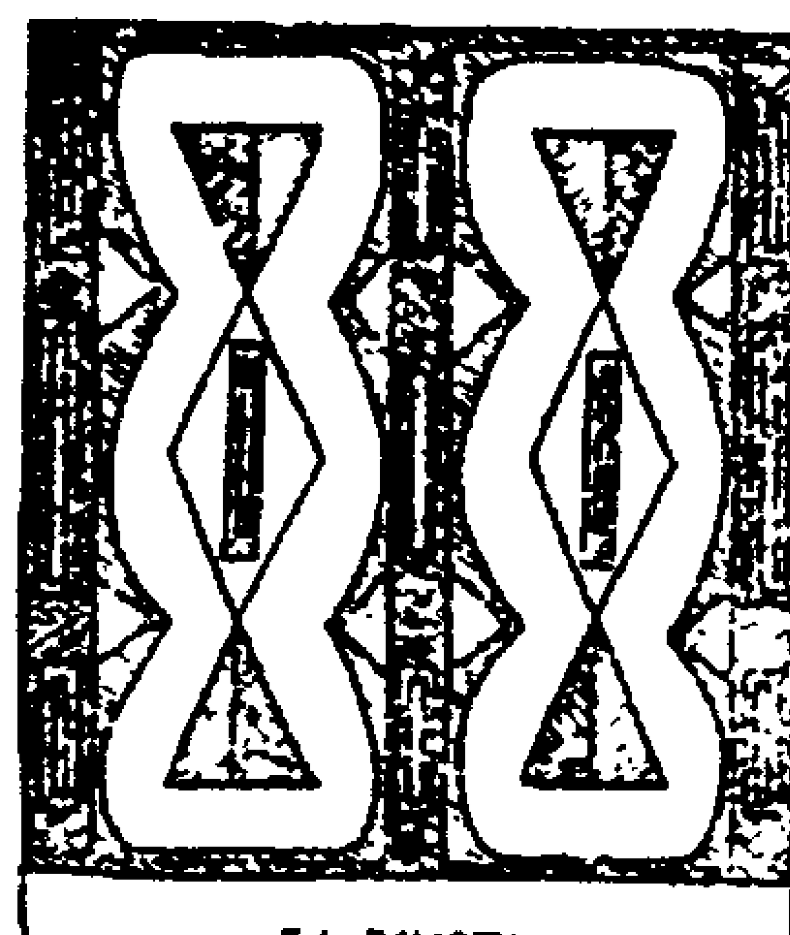


52 NO. CHEYENNE

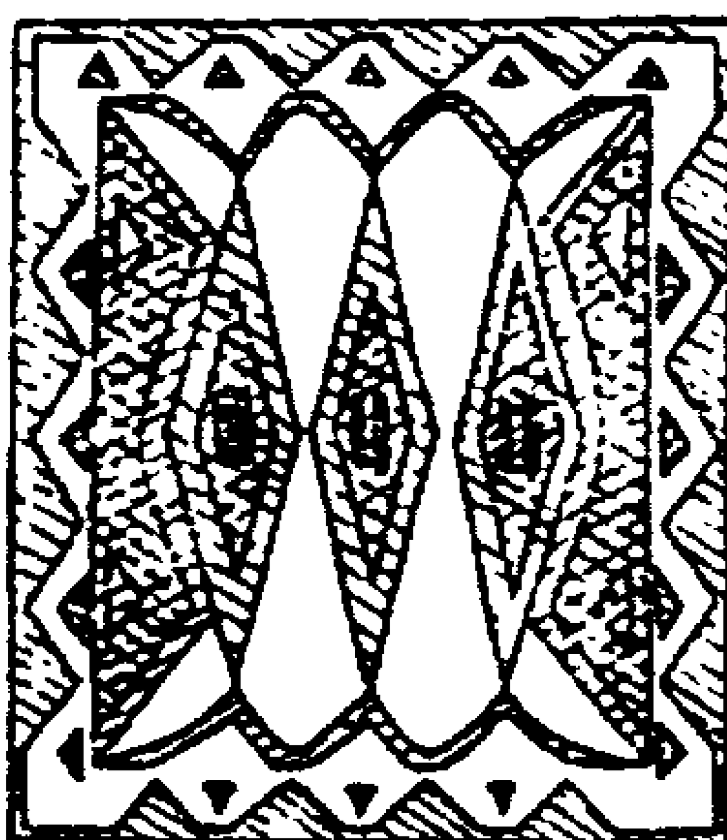




53 OTO



54 DAKOTA



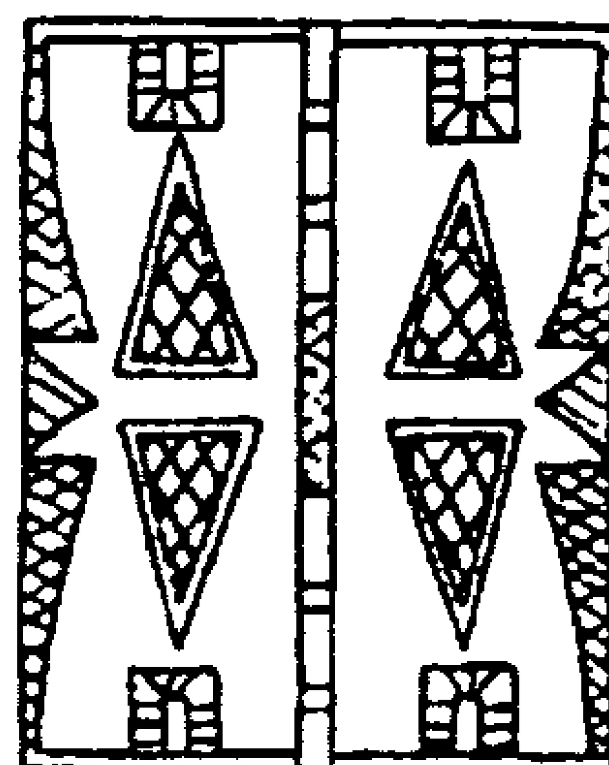
55 DAKOTA



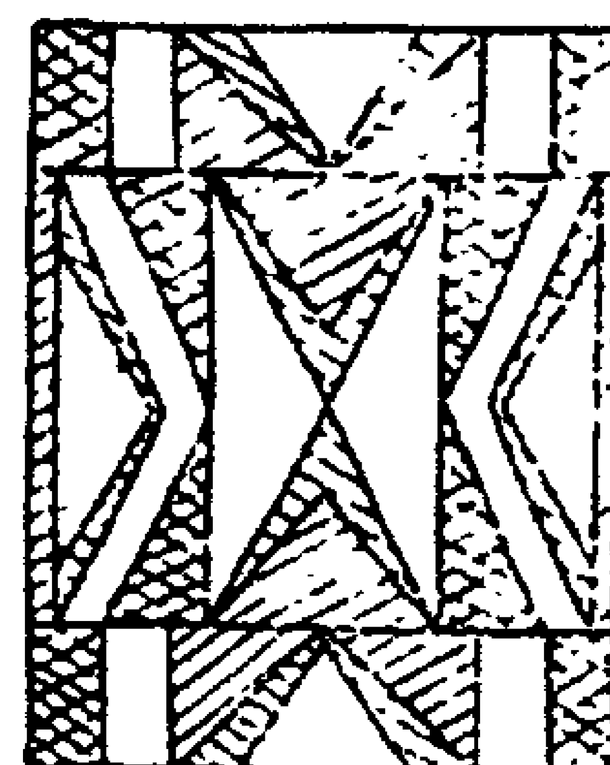
56 DAKOTA



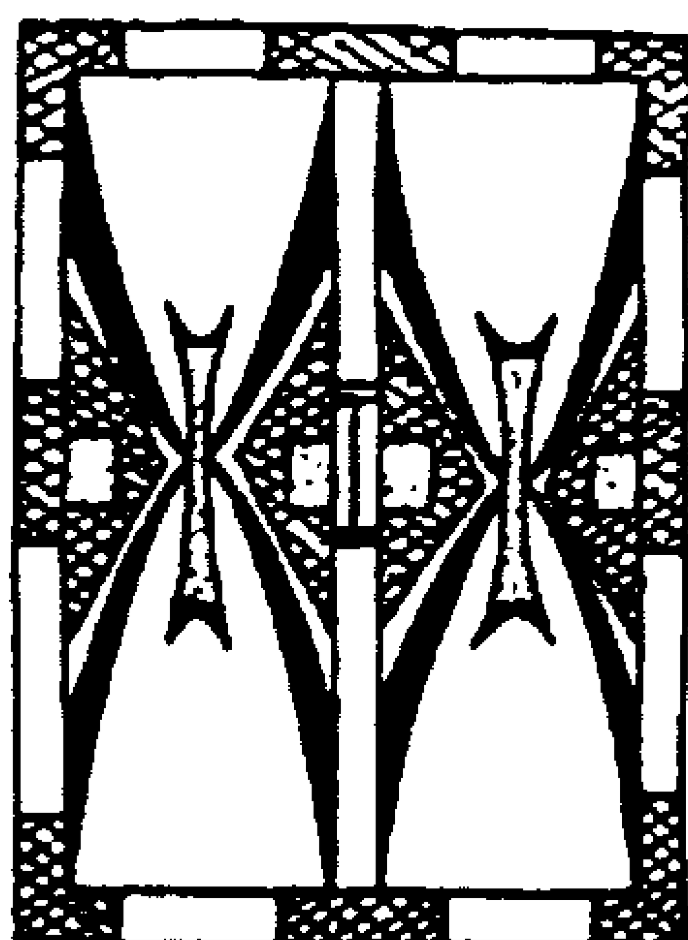
57 DAKOTA



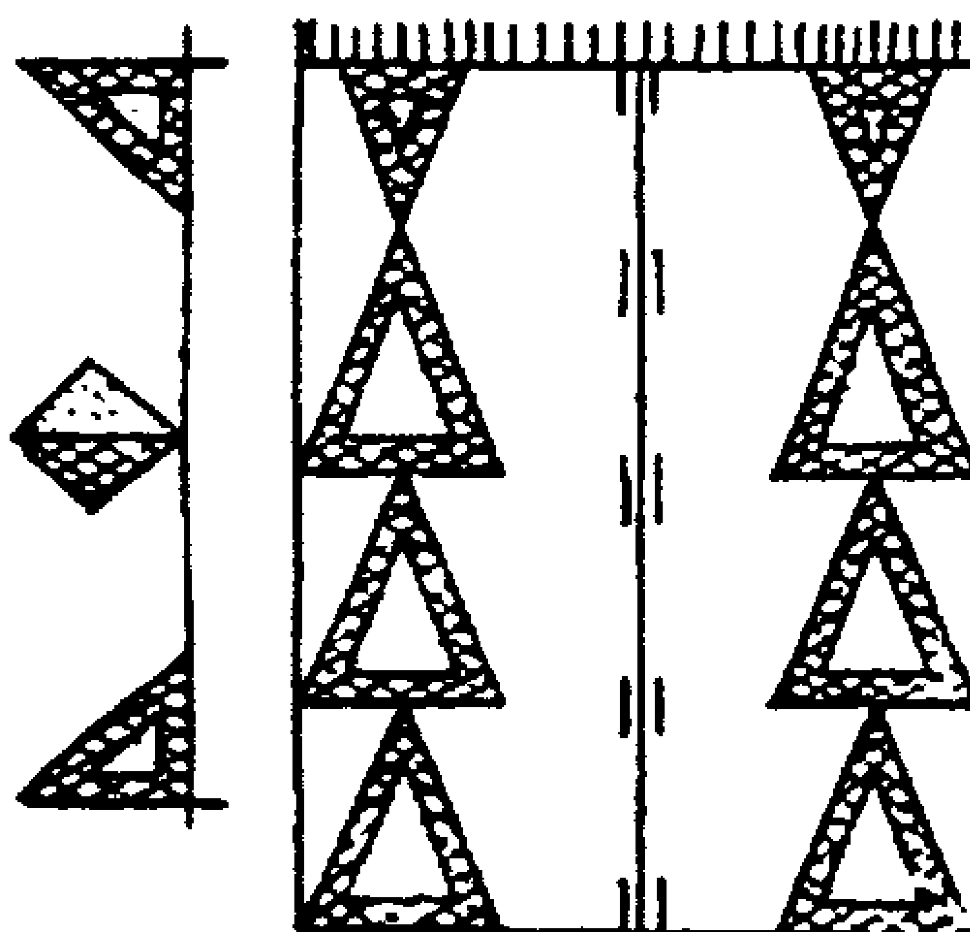
58 DAKOTA



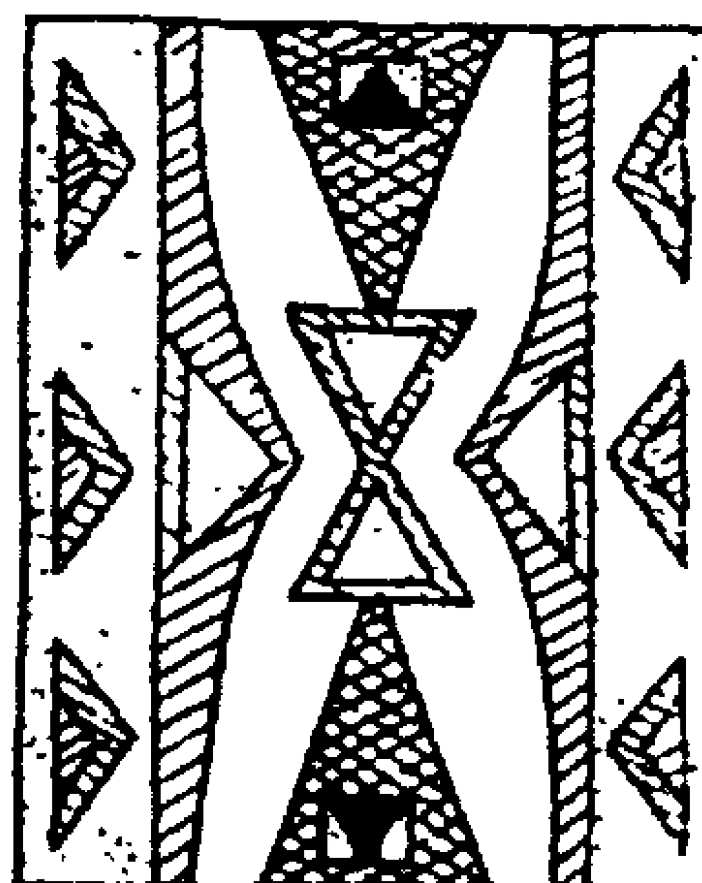
59 DAKOTA



60 DAKOTA



61 DAKOTA



62 DAKOTA

نماذج هندسية تم تطويرها من قبل الهنود الأمريكيين

3

بات من الضروري قياس طول ومحتويات الأشياء. أما بالنسبة للمعايير فهي طالما أخذت أوصالاً من جسم الإنسان. وبهذا الأسلوب بدأت وحدات مثل الأصابع والقدم والأيادي تأخذ طريقها نحو أسماء مثل: "الذراع" ell [وحدة لقياس الطول] والقامة fathom [مقياس عمق المياه يساوي 6 أقدام] والذراع cubit [وحدة قياس قديمة تساوي 18 بوصة].. تذكرنا هذه الكلمات أيضاً بنمط هذه العادات، فعندما شيّدت المنازل عند المزارعين الهنود، وكذلك عند أولئك في أوروبا الوسطى، وضعت المساطر من أجل البناء حسب الخطوط المستقيمة وعند زوايا قائمة. ومن هنا ارتبطت كلمة "مستقيم" بالمد/ "المط". وذلك يعود في حد ذاته إلى عمليات خاصة بالحبل[1]. وكلمة "خط" وحتى "حرير" توضح الصلة بين حرفة الحياكة وبداية الهندسة، وهذا بالطبع واحد من الأساليب التي دفعت الرغبة في تطور القياسات.

طوّر إنسان العصر الحجري الحديث شعوراً طموحاً نحو النماذج الهندسية، فأدى كل من تحميص وتلوين الفخار وتجديل السّمار [نبات تستعمل أوراقه الأسطوانية الطويلة في صنع مقاعد الكراسي] ونسج السلال والأقمشة، وفيما بعد تصنيع المعادن، إلى صقل علاقات الحيز المكاني والمستوى. ولا يخفى هنا دور أنماط الرقص الذي كان يمارس آنذاك. تتمتع زخرفة العصر الحجري الحديث بإيحاءات المطابقة والتناظر والتماثل. وهناك علاقات عددية أخذت مكانها في هذه الأشكال. وما هو مؤكد لدينا نماذج تعود إلى ما قبل التاريخ تمثل أعداداً مثلثاتية، وأخرى تشير إلى الأعداد "المقدسة".

توضح الأشكال 1-4 أمثلة لبعض النماذج الهندسية المشوقة، والتي تظهر في الفخار والحياكة وصناعة السلال. والتصميم الموضح في الشكل 1 موجود في

1- إن تسمية rope-stretchers "شد الحبل" (باليونانية: harpedonaptai، والعربية: مساحة، والأشورية: مساحنو) كانت مرتبطة في أقطار كثيرة بالأفراد المنشغلين بالمساحة. انظر:
S.Gandz, Quellen Und Studien zur Geschichte der Mathematik, Vol.I (1930),pp.255-77.

فخاريات العصر الحجري الحديث في بوسنيا Bosnia، وعلى الموجودات الفنية لحقبة أور ما بين النهرين[1]. إن الفكرة الرئيسة في العمل الفني للشكل 2 موجودة في فخاريات المصرين في عصر ما قبل السلالة الحاكمة (4000-3500 ق.م).[2]

توضح نماذج الشكل التي استخدمها سكان المنازل المشيّدة بالقرب من ليوبليانا Ljubljana (يوغسلافيا) في عصر الهالشتات Hallstatt (أوروبا الوسطى نحو 1000-500 ق.م)[3]. أما تصاميم الشكل 4 المكتظة بالمثلثات والمثلثات المشحونة بالدوائر موجودة في صناديق القبور بالقرب من سوبرون Sopron بهنغاريا، هي بالفعل توضّح محاولات لتشكيل أعدادٍ مثلثاتية ربما أدت دوراً مهماً في الرياضيات الفيثاغورية فيما بعد[4].

ظل هذا النوع من النماذج شائعاً على مر العصور التاريخية. ويمكن إيجاد أمثلة جميلة لمزهريات المينوين Minoan (المتعلق بحضارة جزيرة كريت 3000-1100 ق.م) وعصور الإغريق المبكرة؛ وفيما بعد عند البيزنطيين والفسيفساء العربية والفارسية والأنسجة الصينية. بالطبع هناك معنى ديني أو سحري لهذه النماذج المبكرة. ولكن مع مرور الوقت أصبح رونقها الجمالي سائداً.

نستطيع أن نميز المحاولات البدائية ضد قوى الطبيعة في دين العصر الحجري، حيث امتزجت الاحتفالات الدينية بعمق مع السحر والشعوذة. وهذا العنصر السحري كان متحداً مع مفهومي العدد والشكل، بالإضافة إلى النحت والموسيقى والرسم. وكما نعلم هناك أعداد سحرية (مثل 3 و 4 و 7)، وأشكال سحرية (مثل بنتالفا و سواستكا)[5]. لقد اعتبر بعض الكتاب هذا الاتجاه من الرياضيات العامل الذي يحدد تطورها[6] ، إلا أن الجذور الاجتماعية للرياضيات كانت غامضة في العصر الحديث، بينما كانت واضحة إلى حد ما أثناء الفترة

1- W.Lietzmann, Geometrie Und Praehistorie, Isis,Vol. 20 (1930), pp.436-39.
2- D.E. Smith, History of Mathematics (Boston,1923), Vol.I,p.15 (Dover reprint, 2 vols, 1958).
3- M.Hoernes, Urgeschichte der bildenden Kunst in Europa (Vienna, 1915).
4- F.Boas, General Anthropology (New York, 1938), p.273.
5- Swastika: الصليب المعقوف الذي يرمز إلى الشمس او الحظ السعيد - المترجم
6- W.J. McGee, Primitive Numbers, Nineteenth Annual Report, Bureau Amer. Ethnology 1897-98(1900), pp.825-51.

المبكرة من تاريخ الإنسان. وعلم الأعداد "الحديث" ما هو إلا بقايا من الطقوس السحرية التي يعود تاريخها إلى العصر الحجري الحديث، وربما إلى العصور الحجرية.

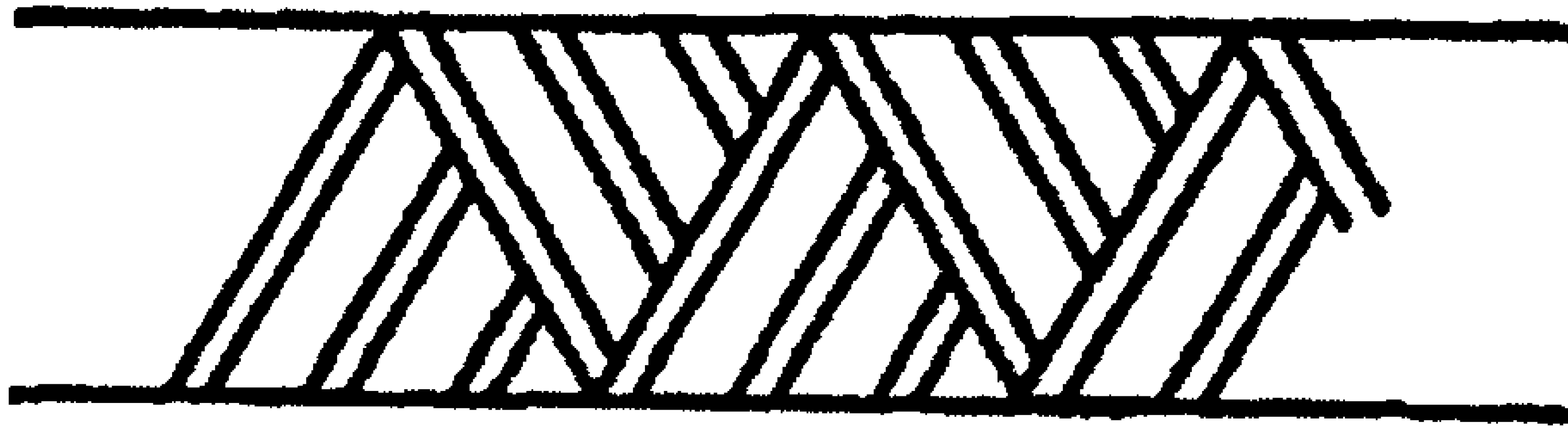


Fig. 1.

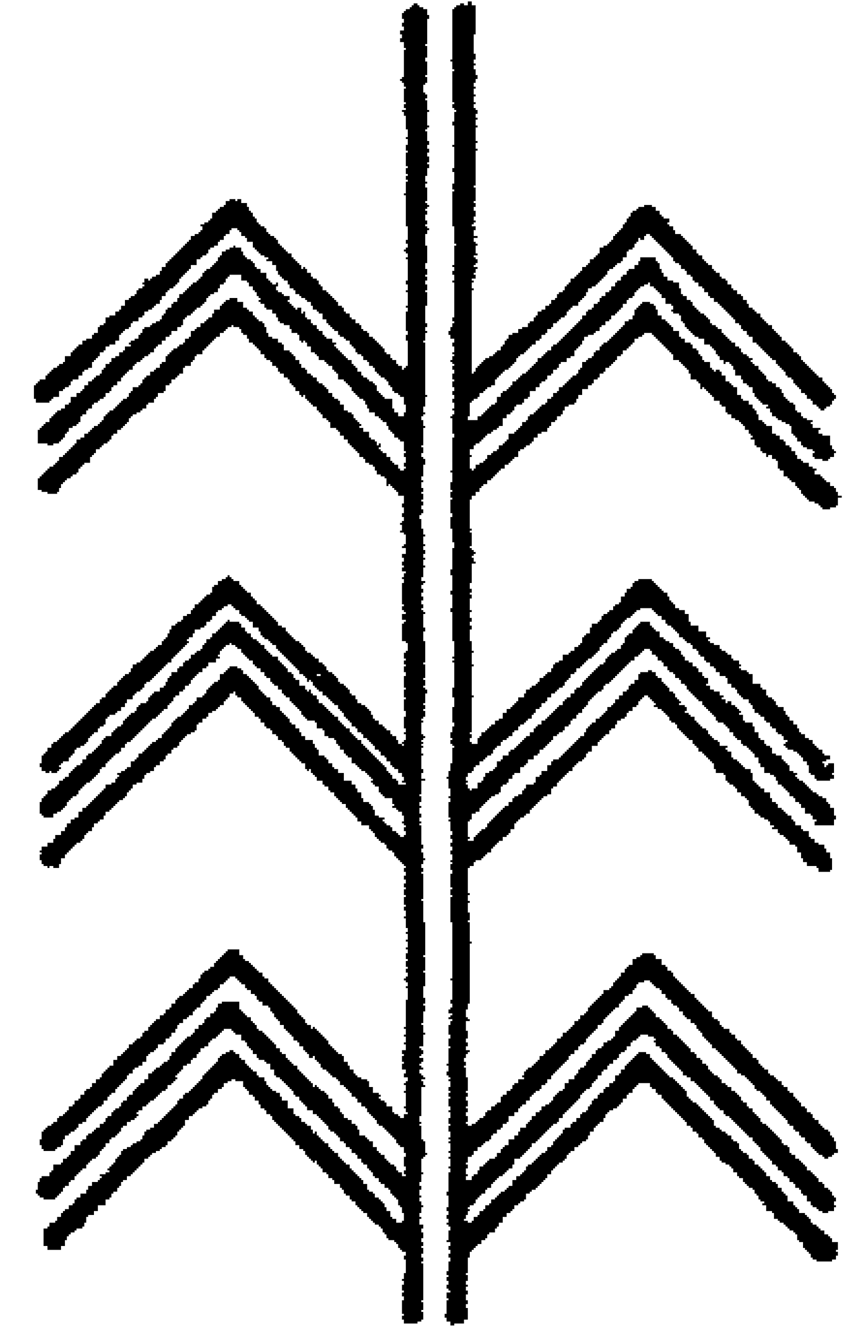


Fig. 2.

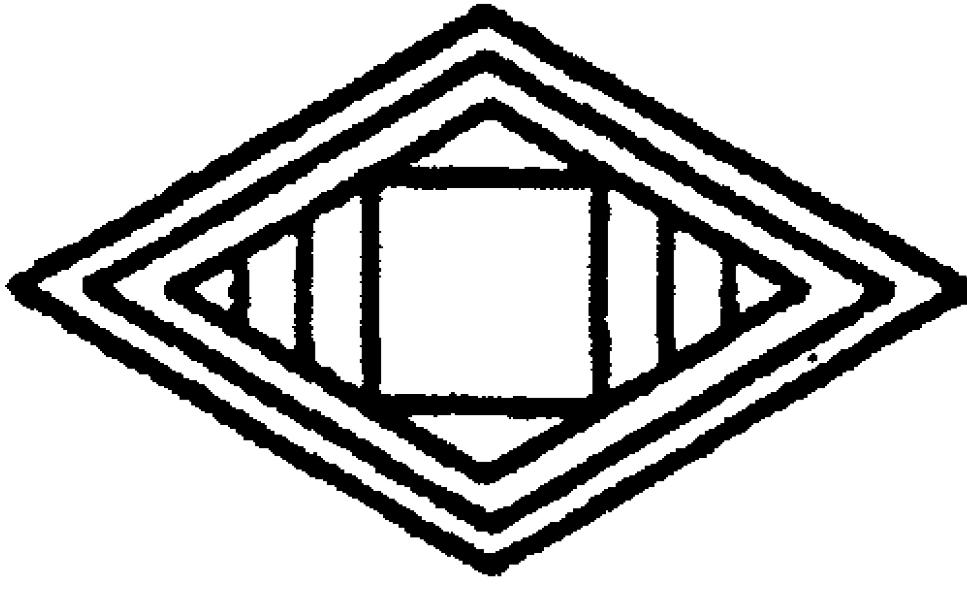
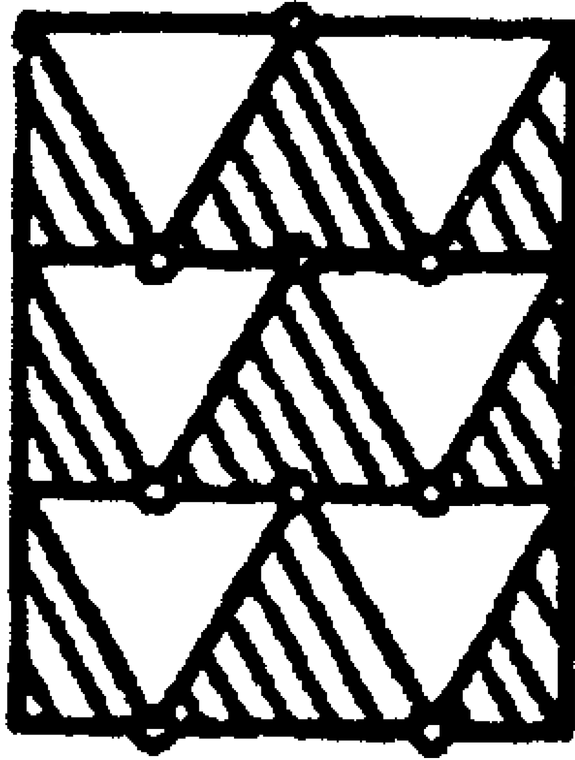
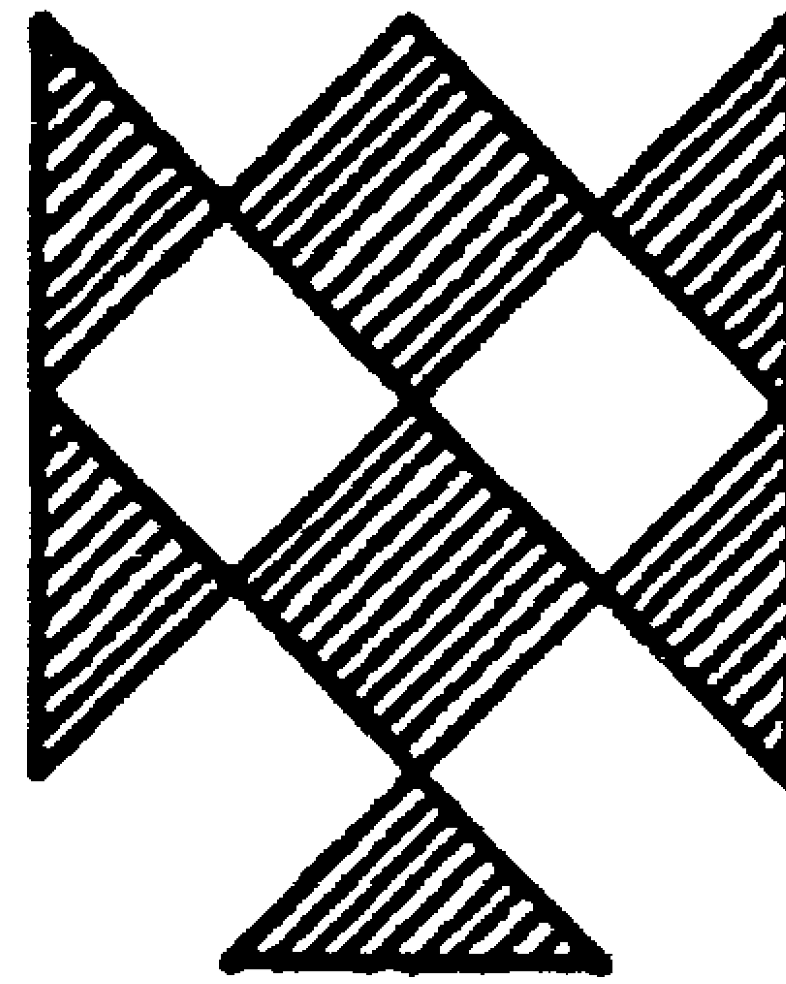


Fig. 3.





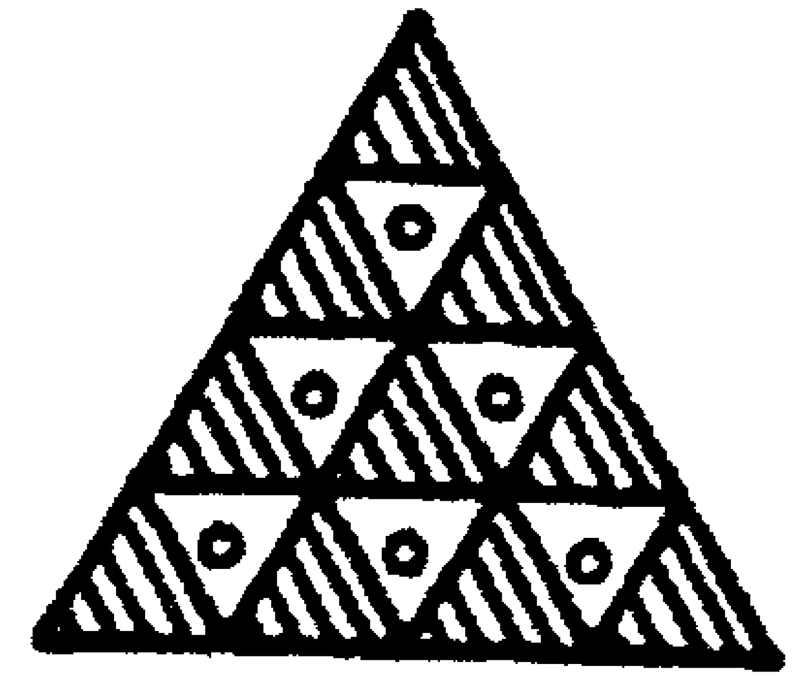


Fig. 4.

٤

نجد عند القبائل البدائية جداً بعض حسابات للزمن، وتباعاً بعض المعارف الخاصة بحركة الشمس والقمر والنجوم. ولقد وصلت هذه المعرفة صفتها العلمية عندما أخذت تتوسع الزراعة والتجارة. ويعود تاريخ التقويم القمري إلى تاريخ الإنسان نفسه، لأن تغير أوجه الزراعة كان مرتبطاً بتغير القمر، ولذا أثار انقلاب الشمس

الصيفي أو الشتائي، وشروق الثريا[1] عند الفجر، اهتمام الشعوب البدائية. نسبت الشعوب المتحضرة الأولى معرفة علم الفلك إلى ماضيها السحيق، إلى عصور ما قبل التاريخ. واستخدمت الشعوب البدائية الأخرى مجموعات النجوم باعتبارها مرشداً لها في المشاهدات. ومن علم الفلك نشأت بعض المعارف حول خواص الكرة والاتجاه الزاوي والدوائر.



زخرفة مصرية

5

تبين هذه الأمثلة التوضيحية القليلة بدايات الرياضيات. وليس بالضرورة أن يمر التطور التاريخي للعلم بمراحل، بحيث يصل إلى ما نقوم به حالياً من أجل تطويره في تعليمنا. كانت بعض الأشكال الهندسية القديمة معروفة عند الإنسان، مثل العقد والنماذج التي أثارت الاهتمام العلمي في السنوات الحديثة. وبالمقابل، يعود

1- ستة نجوم ساطعة واحدة منها لا ترى بالعين المجردة في كوكبة الثور - بنات أطلس السبع اللواتي حوّلن وفقاً للأسطورة الإغريقية الى مجموعة نجوم - المترجم

تاريخ بعض فروع الرياضيات الابتدائية مثل التمثيل البياني أو الإحصاء الابتدائي إلى العصور الحديثة. وقد عبّر سبيسر A.Speiser بشدة بالآتي:

تبدو النزعة المعلنة نحو الضجر متأصلة في الرياضيات الابتدائية. وقد تعزى إلى جذرها المتأخر، حيث إن الرياضياتي المبدع سيفضل أن يشحذ ذهنه إلى المسائل الجميلة والمشوقة[1].

1- A.Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Leipzig, 1925, reprint, New York, 1945), p.3.

الفصل الثاني

الشرق القديم

أ

لقد تطورت مجتمعات جديدة أكثر تقدماً على أنقاض مجتمعات العصر الحجري الحديث على ضفاف الأنهار الكبيرة في آسيا وأفريقيا، وحتى المناطق شبه الاستوائية أو شبه الاستوائية تقريباً، وذلك في الألفية الخامسة والرابعة والثالثة ق.م. وهذه الأنهار الكبيرة هي النيل و دجلة و الفرات و الأندوس Indus؛ وفيما بعد الغانج Ganges و هوانك هو Huang Ho، ثم بعد يانغ - تسي Yang-tse.

تم حرث هذه الأراضي الممتدة على هذه الأنهار لتعطي محاصيل وافرة. طالما تم التحكم بمياه الفيضانات وتم صرف المستنقعات، وبالمقابل في الصحاري والمناطق الجبلية والمساحات الشاسعة التي تحيط بهذه المناطق، فإن أودية الأنهار يمكن أن تحوّل إلى جنان. وفي غضون حقبة من القرون تم التغلب على هذه المشاكل بتشييد الحواجز والسدود وحفر القنوات وإقامة الصهاريج، لذا تطلب الإمداد المنتظم للمياه تنسيقاً للأنشطة الواسعة والمترامية الأطراف، والتغلب على الجهود الكبيرة السابقة الذكر. وقاد هذا إلى تأسيس إدارة مركزية تتموضع في المراكز الحضرية بدلاً من القرى البربرية للعصور السابقة. وأدى الفائض المتعاظم نسبياً، الناتج عن التحسين والتطوير المكثف للزراعة، إلى رفع مستوى المعيشة للسكان بوجه عام، ولكنه خلق أيضاً أرستقراطية حضرية يترأسها قادة جبابرة. كانت هناك حرف متخصصة قامت على أكتاف صناع مهرة وجنود وموظفين وكهنة. وهكذا أنيطت إدارة الأعمال العامة إلى أيادي دائمة ورسمية. وعلى نمط التغيرات الموسمية وحركات الأجرام السماوية، ومن ثم تقسيم الأراضي وتخزين الغذاء وفرض الضرائب،

بدأ الحرف يشق طريقه في الاستخدام ليرمز إلى متطلبات الإدارة وأعمال القادة، مما أكسب البيروقراطيين والصناع المهرة قدراً من المعرفة الفنية الملحوظة: منها علم التعدين والطب. وهذا بالطبع يتطلب معرفة فنون الحساب والقياسات. ومن هذا المنطلق ترسخت في هذا العصر طبقات اجتماعية. وكان هناك قادة ومزارعون دائمون ومزارعون أحرار وحرفيون وكتاب وناسخون وموظفون وأحرار وعبيد.

لقد تعاظمت قوة وثروة الرؤساء المحليين، لدرجة أنهم جاؤوا من أصحاب الإقطاع ذوي السلطة والنفوذ المحدود ليصبحوا ملوكاً وطنيين لهم كامل السيادة. ونشبت النزاعات والحروب بين مختلف الحكام. وأدى ذلك بالتالي إلى نشوء مقاطعات واسعة موحدة تحت سلطة ملك واحد. قامت هذه الأنماط من المجتمعات على الري والتركيز على الزراعة، مما أدى إلى نمط "شرقي" للحكم المطلق. قُدِّر لهذا الحكم المطلق أن يبقى صامداً لقرون، ولكن مع الوقت أخذ يعتريه الانهيار تحت وطأة القبائل الغازية من الجبال والصحاري التي جذبتها ثروات الأودية، أو بسبب إهمال نظام الري الحيوي المعقد. وفي ظل هذه الظروف تحولت السلطة من حاكم إلى آخر للقبيلة؛ وأخذ المجتمع بالتفكك والانحلال إلى وحدات إقطاعية صغيرة؛ وربما تأخذ عملية التوحيد دورها من جديد. ورغم طائلة ثورات السلالات الحاكمة وظهور التحولات أو الانعطافات من الإقطاعية إلى الحكم المطلق، إلا أن القرى التي هي بمثابة الأساس للمجتمع ظلت صامدة دون تغيير في البنية الاجتماعية والاقتصادية الأساسيين. هكذا انتقل المجتمع الشرقي عبر دورات. وحتى وقتنا الحاضر، لا تزال هناك جماعات في آسيا وأفريقيا تحتفظ بنمط العيش نفسه، على الرغم من مضي الآلاف من السنين. كان التقدم بطيئاً وغريباً في ظل هذه الظروف. ويمكن فصل عهود النمو الثقافي عن فترات الركود والانحلال بقرون عديدة.

لقد أضفت السمة الساكنة للمشرق حرمتها الأساسية إلى مؤسساتها، مما مهد الطريق للدين أن يقحم في أجهزة الدولة. وغالباً ما يتقاسم البيروقراطيون هذه الخاصية الدينية للدولة، ففي معظم بلدان المشرق يتولى الكهنة المهمات الإدارية، حيث إن شعلة العلم هي من مهمات البيروقراطيين. ولكن نلاحظ كثيراً - وليس دائماً - في بلدان المشرق أن الكهنة هم المتميزون في حمل ثمرة المعرفة العلمية.

2

بدأت الرياضيات الشرقية باعتبارها علم عملي هدفه تسهيل حسابات التقويم وإدارة الحصاد وتنظيم الأعمال العامة وجمع الضرائب. وكان التركيز المبدئي قائماً على الحسابات العملية والقياسات. وهكذا تم قطف ثمرة هذا العلم بعد قرون على أكتاف حِرَف خاصة كانت مهمتها الأساسية ليس التطبيق فحسب، بل توضيح وشرح العلم ومعرفة كنه أسراره، ومن ثم تحسين اتجاهاته نحو التجريد، وتدريجياً أضحى يدرس لذاته. تطور الحساب إلى الجبر ليس لكون الجبر يسمح بعمليات حسابية أفضل، ولكن باعتباره ناتجاً طبيعياً للعلم الذي تم صقله وتحسينه في الكتب الدراسية. وللأسباب ذاتها تطورت القياسات - ليس كلها - إلى بدايات الهندسة النظرية.

وعلى الرغم من المتاجرة والتجارة التي انغمست فيها المجتمعات القديمة، إلا أن الزراعة كانت المحور الاقتصادي حيث تركزت في القرى التي تتصف بالعزلة وبالنمط التقليدي. وكانت النتيجة على الرغم من التشابه في البنية الاقتصادية وفي أساسيات المعرفة التقليدية العلمية، أن ظل هناك دائماً بون شاسع بين الحضارات المختلفة، وعزلة الصينيين والمصريين خير شاهد على ذلك. كان هناك دائماً تميز بين فنون ومخطوطات المصريين وشعوب بلاد مابين النهرين والصينيين والهنود، والأمر ينطبق أيضاً عل أسلوب الرياضيات عند هذه الشعوب، رغم أن طبيعة الحساب الجبري العامة متشابهة، حتى إن تقدم العلوم عند أحدها تجاوز الآخر في عهود معينة، إلا أنها تحتفظ بالمنحى المتميز، وبالرمزية نفسها.

من الصعب جداً تتبع تاريخ الاكتشافات الجديدة في الشرق، لكون السمة الثابتة للبنية الاجتماعية تميل إلى الاحتفاظ بالمعرفة العلمية التقليدية على مدى قرون بل آلاف السنين، فهناك الاكتشافات التي تمت ضمن نطاق المدن النائية لم يكتب لها الانتشار في المناطق الأخرى. ونتيجة تغير السلالات الحاكمة ونشوب الحروب وكوارث الفيضانات تدمّر الرصيد العلمي والمعرفة التقنية. وهناك حكاية بصدد

ذلك: وهي أنه في العام 221 ق.م، عندما كانت الصين موحدة تحت الحاكم المطلق شيه هوانغ - تي Shih Huang-ti (الإمبراطور الأصفر الأكبر)، الذي أصدر حكماً بتمزيق جميع الكتب الدراسية، تم فيما بعد إعادة معظمها عن طريق الاستظهار والحفظ. مثل هذه الأحداث تجعل تتبع تاريخ الاكتشاف أمراً صعباً.

ثمة صعوبة أخرى في تاريخ علوم الشرق ناجمة عن المواد المستخدمة في احتفاظها. كانت شعوب بلاد ما بين النهرين تقوم بتحميص ألواح الطين، والتي هي بالتالي غير قابلة للتلف[1]. وكان المصريون يستخدمون أوراق البردي، وكانت كتاباتهم تحتفظ في أجواء جافة؛ أما الصينيون والهنود فكانوا يستخدمون مواد أكثر عرضة للتلف مثل الخيزران ولحاء الشجر. بدأ الصينيون باستعمال الورق مع القرن الثاني للميلاد، ولكن لم يبق منها إلا النزر اليسير، والتي يعود تاريخها إلى ألف عام قبل 700 ب.م.

إذاً معرفتنا عن رياضيات الشرق قد تكون سطحية جداً. ونجد أن رياضيات ما قبل القرون الهيلنستية لتاريخ وثقافة وفنون الإغريق بعد الإسكندر الأكبر] قد اقتصرت على أعمال المصرين وشعوب مابين النهرين. ومع ذلك فإن أي اكتشافات جديدة ستؤدي حتماً إلى إعادة تقويم كلي للميزات المختلفة نسبياً لأنماط رياضيات الشرق. ويعتبر الاكتشاف الذي تم التوصل إليه في مصر عام 1858 من أغنى الاكتشافات، فقد أثرى مجالنا التاريخي لسنوات طويلة، وهو معروف ببردية ريند Papyrus Rhind، وتعود كتابتها إلى عام 1650 ق.م، وتحتوي على موضوعات أقدم من ذلك. تعود معرفتنا عن الرياضيات البابلية إلى الاكتشافات الشهيرة التي توصل إليها كل من نوغيبور O.Neugebauer وثوريا - دنجن F.Thureau-Dangin اللذين أماطا اللثام عن عدد كبير من الألواح الطينية في العقود القليلة الماضية.

يبدو الآن أن رياضيات البابليين كانت متقدمة جداً عن نظيراتها في المشرق. وقد يبدو هذا الحكم قاطعاً، حيث يوجد تناسق معين في السمة الفعلية للنصوص البابلية والمصرية على مدى القرون. وعلاوة على ذلك، فإن التطور الاقتصادي كان

1- ما عدا تلك التي لم تؤخذ بعناية بعد التنقيب، ولكن ضياع الألواح نتيجة الإهمال في المعالجة والتناول كان ملفتاً.

متقدماً جداً عند شعوب ما بين النهرين عن البلدان الأخرى بما يعرف بالهلال الخصيب والشرق الأدنى الذي يمتد من بلاد ما بين النهرين إلى مصر. كانت بلاد ما بين النهرين نقطة التقاء عدد كبير من طرق القوافل، في الوقت الذي ظلت فيه مصر معزولة نسبياً. تضاف إلى ذلك أطوار النهرين دجلة والفرات التي تتطلب مهارة هندسية وإدارة، خلافاً للنيل الذي يبدو "أكثر سلاسة عن بقية الأنهار" (على حد تعبير السير وليم ولكوكس Sir William Willcocks). وسوف تكشف لنا الدراسات المتقدمة لرياضيات الهنود القديمة مميزات غير متوقعة، على الرغم من الادّعاءات غير المقنعة.

3

تستمد أكثر معارفنا عن الرياضيات المصرية من برديتين رياضياتيين هما: بردية ريند (سبق ذكرها): وتحتوي على 85 مسألة: والأخرى البردية المعروفة ببردية موسكو: وقد تكون هي الأقدم بقرنين من الأولى، وتحتوى على 25 مسألة. وهذه المسائل ما هي إلا معارف تقليدية قديمة تم الحصول عليها عندما جمعت المخطوطات، ولكن هناك برديات فرعية أكثر حداثة من تلك - قد يعود تاريخها إلى عصور الرومان - وهي توضح عدم وجود فروق في المنحى نفسه. فالرياضيات التي تم التنبؤ بها كانت قائمة على النظام العشري للترقيم مع إشارات خاصة لكل وحدة عشرية كبيرة - فالنظام الذي ألفناه عن طريق النظام الروماني ينطلق من المبدأ نفسه وهو: MDCCCLXXVIII=1878 [1].

وعلى ضوء هذا النظام طور المصريون حساباً قائماً على سيادة خاصية التجميع، مما يعني أن النزعة الرئيسة هي اختزال كل عمليات الضرب إلى جمع متكرر. فعلى سبيل المثال يمكن الحصول على حاصل ضرب عدد بالعدد 13 أولاً بالضرب في 2 و 4 ثم 8 وإضافة نتائج الضرب بالعدد 4 و 8 إلى العدد الأصلي.

1- M=1000, D=500, C=100, L=50, X=10, V=5, I=1 المترجم.

فمثلاً لحساب 13×11

*1	11
2	22
*4	44
*8	88

وبإضافة الأعداد التي تقابل * سيكون الناتج 143 [88+44+11].

إن حساب الكسور هو أكثر مظاهر الحساب المصري اللافت للنظر، فجميع الكسور يمكن اختزالها إلى مجاميع تسمى كسور الوحدة؛ وتعني الكسور التي بسطها العدد 1. توضح الكسور بعدد المقامات مع رمز فوقه، والذي سنوضحه بخط، فمثلاً يشار إلى الكسر $\frac{1}{10}$ بالرمز $\overline{10}$ باستثناء الكسرين $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ فهما رمزان خاصان. وتم اختزال مجاميع كسور الوحدة بواسطة جداول، بحيث تعطي تحليلاً للكسور على الشكل $\frac{2}{n}$ - والتحليل ضروري فقط لحاصل الضرب الثنائي. هناك جدول في بردية ريند يبين تكافؤ كسور الوحدة لجميع الأعداد الفردية n من 5 إلى 101.

فمثلاً:

n=5	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$(\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15})$
7	$\overline{4}$	$\overline{28}$	
9	$\overline{6}$	$\overline{18}$	
59	$\overline{36}$	$\overline{236}$	$\overline{531}$
97	$\overline{56}$	$\overline{679}$	$\overline{776}$

لم تكن الفكرة واضحة من وراء هذا الاختزال الخاص لكسور الوحدة.

(مثلاً: لم اختزال العدد n=19 يساوي $\overline{114}$ $\overline{76}$ $\overline{12}$ و ليس $\overline{220}$ $\overline{57}$ $\overline{12}$؟)

لقد أعطى حساب الكسور هذا إلى الرياضيات المصرية خاصية محكمة، ولكنها مضجرة. ورغم عيوب هذه العملية الخاصة بكسور الوحدة، إلا أنه تم تداولها لآلاف السنين، ليس أثناء العصر الإغريقي فحسب، بل حتى أثناء العصور

الوسطى. تكمن وراء هذا التحليل بعض المهارات الرياضياتية. وهناك نظريات مشوقة تشرح الأسلوب الذي توصل به المصريون إلى نتائجهم[1].

معظم المسائل التي تناولها المصريون بسيطة جداً، ولم تتجاوز المعادلة الخطية بمجهول واحد، فمثلاً: ما هي الكمية التي إذا أضيف ثلثاها ونصفها وسبعها يكون الناتج 33؟ الجواب هو $14\frac{28}{97}$ ويكتب على صورة كسور وحدة: $\overline{194}$ $\overline{388}$

$\overline{14}$ $\overline{4}$ $\overline{97}$ $\overline{56}$ $\overline{679}$ $\overline{776}$

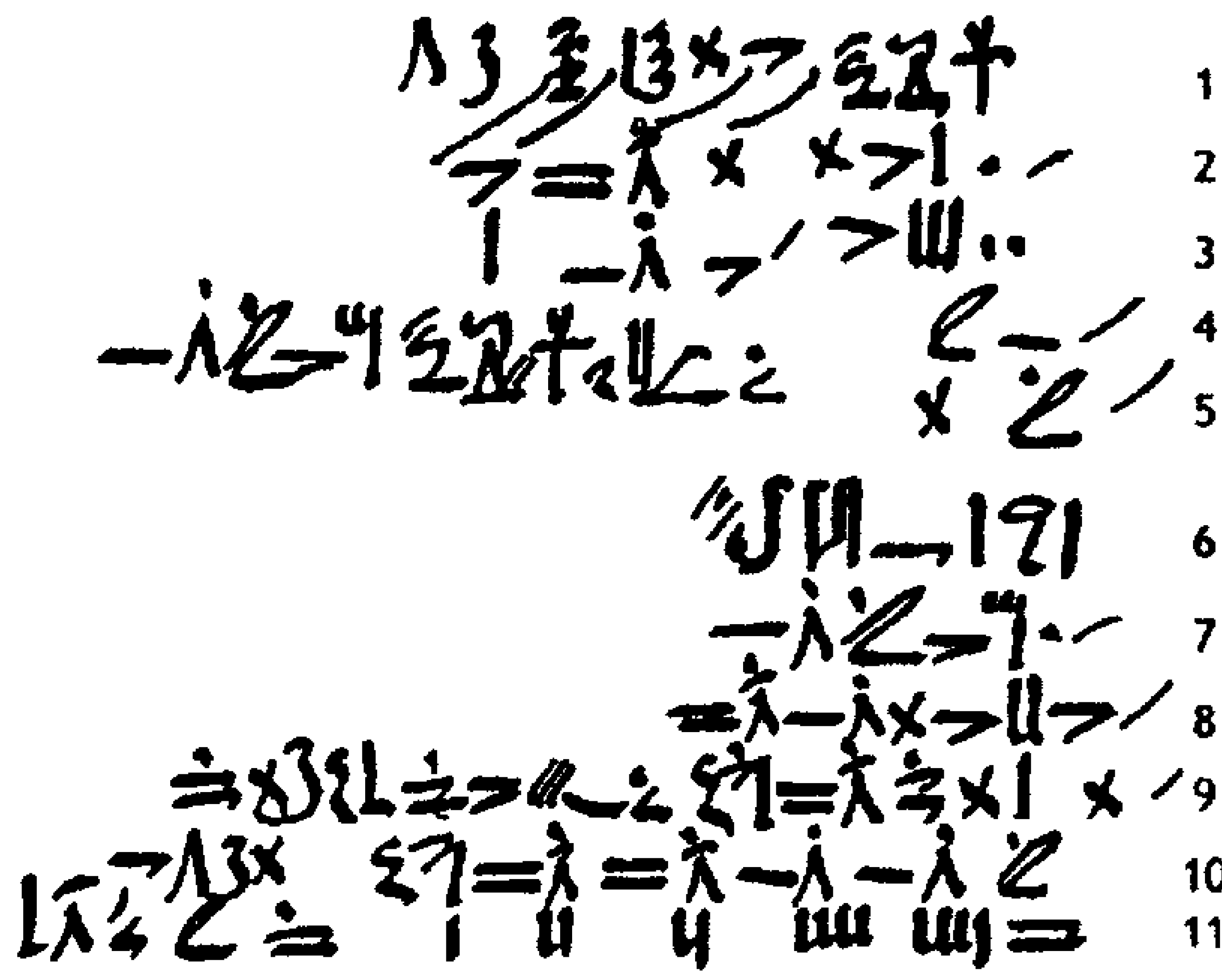
برديات مصرية

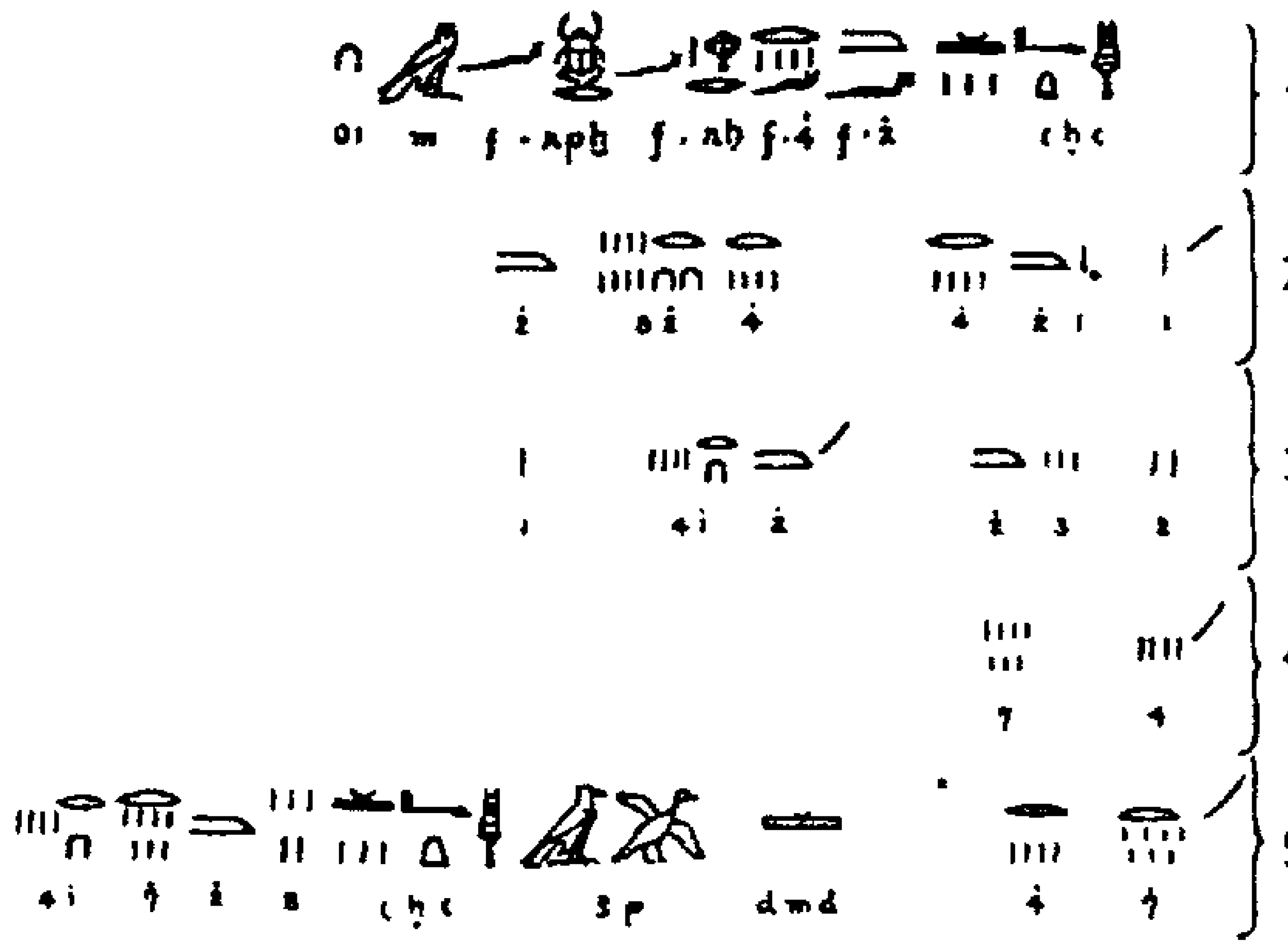
يوجد معنى هيروغليفي للمجهول في المعادلة، هو عبارة عن "كمية كبيرة/ركام"، ويسمى هاو hau أو آها aha، لذا يسمى الجبري المصري أحياناً "حساب الآها" aha calculus.

تتناول المسائل ارتفاع أسعار الخبز والأنواع المختلفة للجعة وإطعام الحيوانات وتخزين الحبوب توضيح الأصول العملية لهذا الحساب الممل والجبر البدائي. توضح بعض المسائل الاتجاهات النظرية مثل: مسألة تقسيم مئة رغيف على خمسة أفراد، بحيث يكون نصيب كل فرد على صورة متوالية حسابية، ويكون سبع مجموع التقسيمات الكبيرة الثلاثة مساوٍ لمجموع التقسيمين الاثنين الصغيرين. كما نجد

1- O.Neugebauer, "Arithmetik und Rechentechnik der Agypter," Quellen Und Studien zur Geschichte der Mathematik, Vol.B I (1931), pp.301-380; B.L. van der Waerden, Die Entestehungsgeschichte der agyptischen Bruchrechung, Vol. 4 (1938), pp. 359-382; E.M. Bruins,"Ancient Egyptian Arithmetic: 2/N," Proc.Nederl. Akad. Wet., Vol. A55 (1952),pp.81-91.

متوالية هندسية تتعامل مع سبعة منازل، وفي كل منزل توجد سبع قطط، وكل قطة تراقب سبعة فئران، وبهذا تكشف عن معرفة صيغة مجموع المتوالية الهندسية[1].





أحد البرديات المصرية

بعض المسائل ذات طبيعة هندسية. ويتناول أكثرها القياسات.، وتم بالفعل إيجاد مساحة المثلث باعتبارها حاصل ضرب نصف القاعدة في الارتفاع؛ ومساحة الدائرة التي قطرها d من العلاقة $(d-\frac{d}{9})^2$، والتي بالتالي تؤدي إلى قيمة π وتساوي $\frac{256}{81}=3.1605$.

1ـ تذكرنا هذه بأغنية الأطفال التي تقول:

في طريقي إلى سانت أفيس
رأيت رجلاً مع سبع زوجات
كل زوجة تحمل سبعة أكياس
وفي كل كيس سبع قطط
ولكل قطة سبع هريرات
الهريرات والقطط والأكياس والزوجات
فكم عدد المتوجهين إلى سانت أفيس؟

نلحظ من ذلك كيف يمكن أن يبقى نوع كهذا على مر العصور.

هـذا بالإضـافة إلى وجـود صـيغ الحجـوم لمجـسمات مثـل المكعـب ومتـوازي السـطوح والأسـطوانة الدائريـة، وكـذلك جميـع الحاويـات الـتي تـستخدم لتخـزين الحبوب. إحدى النتائج الأكثر شهرة في القياسـات المصرية هـي الصيغة الـتي تتعلق بقيمة الهرم الرباعي الناقص: $V = (\frac{h}{3})(a^2 + ab + b^2)$، حيث a و b هما طولا ضلعي المربعين، و h هو الارتفاع.

تعتبر هـذه النتيجـة متممـة للـتي لم توجـد بعـد في صـور أخـرى للرياضـيات القديمة. وهـي أكثـر روعـة من حيـث لا توجـد هنـاك إشـارة إلى أن المصريين كانت لديهم فكرة عن مبرهنة فيثاغورس، رغم بعض القصص الـتي لـيس لها أساس من الصحة عـن harpedonaptai الـذي اسـتطاع أن ينـشئ مثلثـات قائمـة الزوايا باسـتخدام سلك/وتر مكون من 12=5+4+3 عقدة[1].

فهنا يجـب أن نكـون حـذرين إزاء المبالغـات المتعلقـة بالمعرفـة الرياضـياتية عنـد قدماء المصريين؛ وأن جميع أنواع العلوم المتقدمـة تـدين إلى بنـاة الأهرامـات الـتي يعـود تاريخهـا إلى 3000 سـنة ق.م، وربمـا قبـل ذلـك. وهنـاك حكايـة متداولـة علـى نطـاق واسع: وهي أن المصريين الذين عاشوا في الفترة 4212 ق.م قد تبنوا بما يعرف بالـدورة الشعرانية لمتعلق بالشعرى اليمانية وبالسنة المصرية القديمـة المؤلفـة مـن $365\frac{1}{4}$ يومـاً لقياس التقويم.

مثـل هـذه الدقـة الرياضـياتية والأعمـال الفلكيـة لا يمكـن أن تكـون نتـاج شعوب نشأت في ظروف العصر الحجـري الحـديث. ومـصادر هـذه القـصص تعـود إلى التقليد المصري المتأخر الذي انتقل إلينا عن طريق الإغريق.

إنهـا دون شـك خاصـية شـائعة في الحـضارات القديمـة: أن تعـزى المعـارف الأساسـية إلى العـصور الأولى. تـشير جميـع النـصوص المتاحـة إلى أن تـاريخ الرياضـيات المصرية يعـود إلى أصـول بدائيـة، والوضـع نفـسه بالنـسبة إلى العلـوم الفلكيـة.

1- S.Gandz, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Vol. I (1930).

٤

لقد وصلت رياضيات بلاد ما بين النهرين إلى مستوى أعلى من الرياضيات المصرية. وهنا بإمكاننا أن نستبين التقدم على مدى القرون. تعود أقدم النصوص والكتابات إلى العصر السومري الحديث (سلالة أورUr التي يعود تاريخها إلى 2100 سنة ق.م تقريباً) والتي تتضح بقدرتها الحسابية. تحتوي هذه الكتابات على جداول الضرب القائم على نظام الترقيم الستيني المطور تماماً، والذي فرض نفسه على النظام العشري الأصلي. توجد هناك رموز ألواح لكتابات مسمارية تشير إلى الأعداد 1 و 60 و 3600 وحتى 60^{-1} و 60^{-2}، ومع ذلك ليست هذه سمتهم الأكثر تميزاً. استخدم السومريون الرمز نفسه، ولكن أشاروا إلى قيمته بموضعه؛ بينما أشار المصريون إلى كل وحدة عالية برمز جديد، وهكذا نجد العدد 1 متبوعاً بآخر يعني 61 و 5 متبوعاً بالعدد 6 متبوعاً بالعدد 3 (وسيكتب (5,6,3) ويقصد به $5\times60^2+6\times60+3 = 18363$. فإن النظام لهذا الوضع أو القيمة المكانية لا يختلف جوهرياً عن نظام كتابة الأعداد عندنا، من حيث يمثل الرمز 343 بالآتي: $3\times10^2+4\times10+3$.

يتمتع هذا النظام بمزايا هائلة للحسابات. وكما سنرى حالاً عندما نحاول أن نجري عملية الضرب حسب نظامنا وحسب نظام الأعداد الرومانية، فإن النظام الموضعي قد يتغلب على الكثير من صعوبات الحساب الكسري كما هو الحال مع نظامنا العشري في كتابة الكسور. يبدو أن النظام برمته تطور باعتباره نتيجة مباشرة في أساليب الإدارة كما هو موضح في آلاف النصوص التي يعود تاريخها إلى الفترة نفسها التي تتعامل مع تقسيم الماشية والحبوب وغيرها من الأعمال الحسابية القائمة على هذه التحويلات.

يوجد بعض الغموض في هذا النمط من الحسابات، من حيث إن المعنى الدقيق لكل رمز لم يكن دائماً واضحاً من موضعه. إذاً (5,6,3) قد يعني أيضاً

$$5\times60^{-1}+6\times60^0+3\times60^{-1}=306\frac{1}{20}$$

مما يعني أن التفسير الدقيق يمكن استخلاصه من السياق نفسه. ثمة نقطة غير مؤكدة تم تقديمها من خلال الواقعة أن المكان الخالي يعني أحياناً صفراً، حيث إن (11.5) قد تمثل $11\times60^2+5=39605$. وأخيراً فإن رمزاً خاصاً للصفر لم يظهر في الأفق إلا في الحقبة الفارسية المسماة "ابتكار الصف". وكان إذاً نتيجة منطقية مردها إدخال النظام الموضعي بعدما وصلت الأساليب الحسابية صورتها النهائية.

ظل كلا النظامين الستيني والقيمة المكانية مرهونين في يد الإنسانية بصورة دائمة. ويعود تاريخ تقسيمنا الحالي إلى الساعة: 60 دقيقة و 3600 ثانية، إلى العهد السومري؛ وكذلك الدائرة إلى 360 درجة، والدرجة 60 دقيقة، والدقيقة إلى 60 ثانية. ثمة سبب يدفعنا إلى الاعتقاد باختيار الوحدة الستينية 60 بدلاً من الوحدة العشرية 10. ذلك أنه عندما ظهرت محاولة توحيد أنظمة القياسات تبين أن العدد 60 له قواسم كثيرة، وقد يؤدي دوراً أكبر. ومن منطلق نظام القيمة المكانية [أي موضع وترتيب العدد بالنسبة للأعداد الأخرى] فإن أهميتها الدائمة يمكن مقارنتها مع حروف الأبجدية[1] (كلا الاختراعين استبدلا الرمزية المعقدة بطريقة بسيطة يفهمها السواد الأعظم)، ولا يزال تاريخها غامضاً. بات من المنطقي أن يفترض أن الهنود والإغريق قد اطلعوا عليها من خلال طرق القوافل المؤدية إلى بابل. كما نجد أن الباحثين المسلمين وصفوها بأنها اختراع هندي، لذا نجد أن الإرث البابلي كان له تأثير في قبول النظام الموضعي فيما بعد.

5

يعود تاريخ المجموعات الأخرى من النصوص المسمارية إلى الحكم البابلي أولاً عندما تولى الملك حمورابي مقاليد الحكم (قرابة 1950 ق.م) وخضعت الشعوب السامية للسومريين الأصليين، لذا نجد في هذه النصوص تطور

1- O. Neugebauer, " The History of Ancient Astronomy" Journal of Near Eastern Studies, Vol. 4 (1945), p.12.

الحساب إلى جبر مؤسس تماماً. كما نجد أن المصريين في هذه الحقبة انحصرت قدرتهم في حل المعادلات الخطية البسيطة فقط، بينما نجد بابليي عصر حمورابي لديهم القدرة في التعامل مع أساليب المعادلات التربيعية. كما استطاعوا حل المعادلات الخطية والتربيعية لمتغيرين، وحتى المسائل التي تتعلق بالمعادلات التكعيبية والرباعية. وتمكنوا من صوغ هذه المسائل لقيم عددية محددة فقط للعوامل، ولكن تشير طريقتهم إلى معرفتهم دون شك بالقاعدة العامة.

المثال الآتي كما هو وارد في ألواح تلك الفترة[1]:

تحتوي المساحة A على مربعين مجموعهما يساوي 1000، وأحد أضلاع المربع يساوي 2/3 ضلع المربع الآخر، والذي ينقص بمقدار 10. فما هي أضلاع المربع؟

يقودنا هذا السؤال إلى المعادلة $x^2+y^2=1000$ و $y=2/3x-10$ ويمكن إيجاد الحل من المعادلة التربيعية $13/9x^2-40/3x-900$ التي لها حل واحد موجب هو $x=30$.

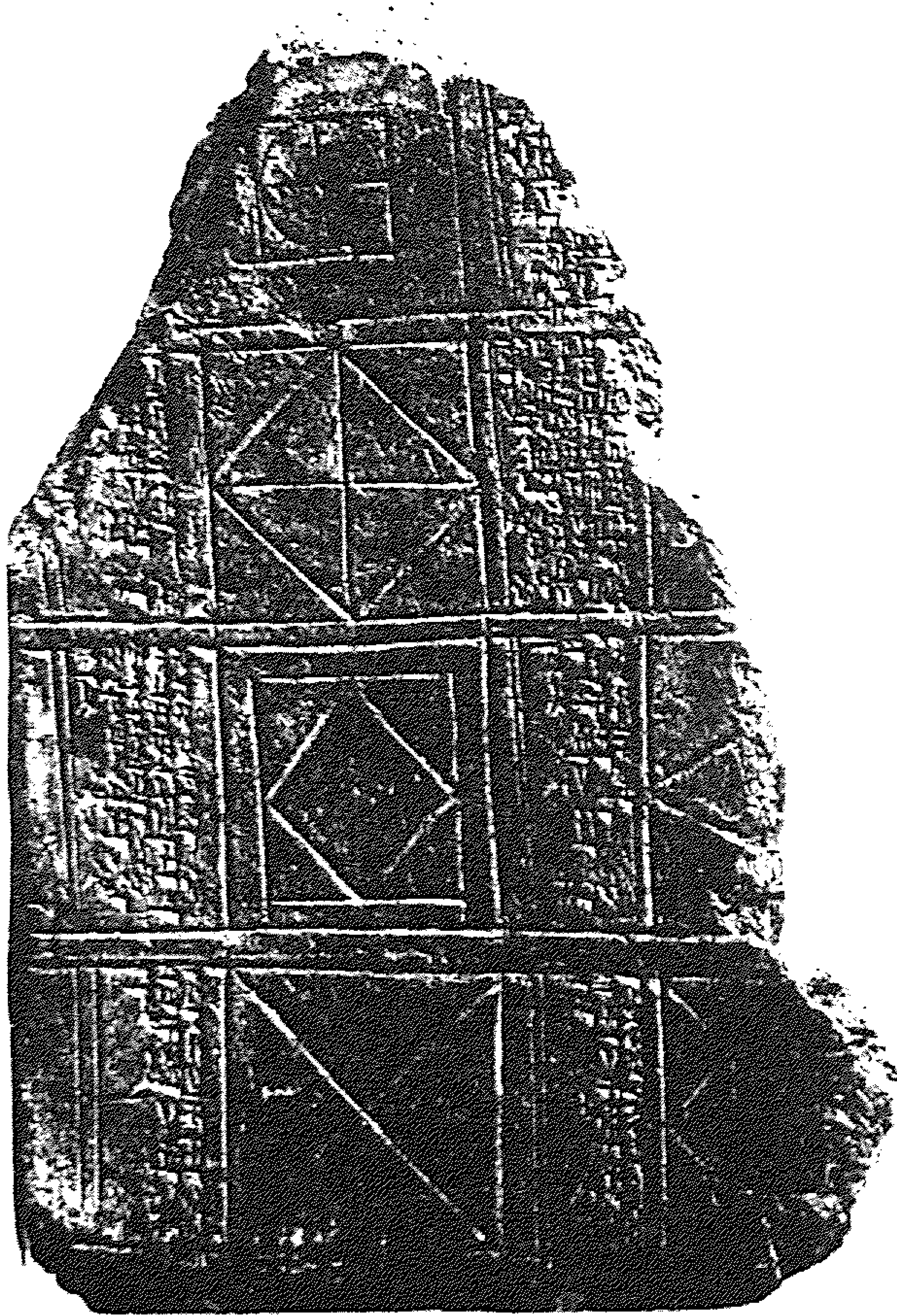
الحل الأصلي موجود بالنص المسماري (كما هو الوضع مع المسائل المشرقية) بعدد بسيط من الخطوات العددية التي يجب أن تؤخذ لحل المعادلة التربيعية. تربيع العدد 10 هو 100، وبطرح 100 من 1000 نحصل على 900، ويكتب العدد 1000 هكذا (16,40)، و 900 (15,0)، وهكذا.

انبثقت الخاصية القوية للحساب الجبري لرياضيات البابليين من الهندسة. وبالمثل تطورت الهندسة في مصر من أسس القضايا العلمية التي تتعامل مع القياسات. ولكن غالباً ما يكون الشكل الهندسي هو الذي يمثل الصورة الجبرية للمسألة. يوضح المثال السابق كيف أدت المسألة المتعلقة بمساحة المربع إلى مسألة جبرية من نمط آخر؛ وهذا المثال ليس استثناءً. وتبين النصوص أن الهندسة البابلية

1- K. Vogel, Vorgriechische Mathematik, Vol. II (Hanover-Paderborn, 1959), p.50.
الألواح موجودة في مكتبة جامعة شتراسبورغ الوطنية
Strassbourg Bibliotheque Nationale et Universitaire.

للعصور السامية كانت تقتني صيغ لمساحات أشكال مستقيمة بسيطة وحجوم لمجسمات بسيطة، علماً بأن حجم الهرم المقطوع لم يكتشف بعد. فالمبرهنة المعروفة بمبرهنة فيثاغورس كانت معروفة ليس لحالات خاصة فحسب، بل لحالات عامة أيضاً. على أي حال، كانت الخاصية الرئيسة لهذه الهندسة هي صفتها الجبرية. وينطبق هذا على كل الكتابات والنصوص اللاحقة، وتحديداً تلك التي يمتد تاريخها إلى الحقبة الثالثة، والتي نجد فيها عدداً هائلاً من نصوص العصر البابلي الجديد والعصر الفارسي والعصر السلوقي Seleucid (من 600 ق.م إلى 300 ب.م تقريباً).

كانت نصوص هذه العهود الأخيرة متأثرة تماماً بتطور علم الفلك البابلي، الذي كان آنذاك يفترض أنه يحمل سمات علمية فعلاً، حيث تم وصفه بتحليل متأنٍ لحالات مختلفة. وهكذا أصبحت الرياضيات أكثر كمالاً في أساليبها الحسابية. وتناول الجبر مسائل المعادلات التي تتطلب الآن مهارات رقمية تستدعي الانتباه. توجد هناك حسابات يعود تاريخها إلى العهد السلوقي، والتي قد تصل إلى سبع عشرة منزلة ستينية. ومثل هذا العمل العددي المشحون بالتعقيد لم يتعلق بمسائل الضرائب أو القياسات فحسب، بل



لوح طيني

كل محفزاً ومشوقاً للمسائل الفلكية أو الرغبة الخالصة من أجل الحسابات.

تتم معظم عمليات الحوسبة الحسابية في جداول تتراوح بين جداول الضرب البسيطة إلى قائمة المقلوبات (التعاكس) والجذور التربيعية والتكعيبية. يدلي أحد الجداول بقائمة من الأعداد على صورة n^3+n^2 ، والتي كانت تستخدم كما يبدو في حل المعادلات التكعيبية مثل $x^3+x^2=a$.

هناك قيم تقريبية رائعة للجذر $\sqrt{2}$ تم التعبير عنها بالكسر $1\frac{5}{12}$ ($1\frac{5}{12}=1.4167$, $\sqrt{2}=1.4142...$)[1]. ويبدو أن الجذور التربيعية وجدت بالصيغ الآتية:

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2+h}=a+\frac{h}{2a}=\frac{1}{2}(a+\frac{A}{a})$$

لا يوجد أفضل تقريب للنسبة π في الرياضيات البابلية، حيث وجدت في النصوص الإنجيلية بأنها تساوي 3. ولقد أخذت مساحة الدائرة باعتبارها $\frac{1}{12}$ من تربيع قطرها، ولكن أعطت التقريبات القيمة $\pi=3\frac{1}{8}$.[2]

وتظهر المعادلة $x^3+x^2=0$ حول مسألة البحث عن حل للمعادلات الآتية:

$xyz+xy=1+\frac{1}{6}$ و $y=\frac{2}{3}x$ و $z=12x$ والتي تؤدي إلى $(12x)^3+(12x)^2=252$

أو $12x=6$ (كما هو وارد في الجدول).

وتوجد نصوص مسمارية أيضاً تتعلق بمسائل الربح المركب، مثل مسألة ما هي الفترة اللازمة لمبلغ معين من المال كي يتضاعف بفائدة مقدارها 2%. تأخذنا هذه المسألة إلى المعادلة $(1\frac{1}{5})^x=2$ ، والتي تم حلها أولاً بالاستناد إلى 3<x<4، ثم بالاستيفاء الخطي (وبأسلوبنا): $4-x=\frac{(1.2)^4-2}{(1.2)^4-(1.2)^3}$

مؤدياً إلى $x=4$ سنة مطروحاً منه (2,33,20) من الشهور.

1- O.Neugebauer, Exact Science in Antiquity, Univ. of Pennsylvania Bicentennial Conf.. Studies in Civilization (Philadelphia,1941), pp.13-29.

2- E.M. Bruins and M.Rutten, Textes mathématiques de Suse (Paris, 1961), p.18.

كانت إحدى الأسباب المحددة في تطوير الجبر في حقبة 2000 ق.م تداول النصوص السومرية القديمة من قبل السومريين - البابليين، كانت النصوص القديمة شبيهة بالكتابة الهيروغليفية؛ وهي عبارة عن مجموعة من الأشكال، وكل رمز يمثل فكرة واحدة، استخدمها الساميون لأداء أو ترجمة الأصوات في لغتهم، كما أخذوا أيضاً بعض الإشارات بمعانيها القديمة. تعبر هذه الإشارات عن مفاهيم، ولكن تلفظ بطريقة أخرى. والجدير بالذكر أن هذه الأشكال أو الصور الكتابية كانت تناسب اللغة الجبرية كما هو الحال مع رموزنا الحالية مثل + و - وغيرها، والتي هي في الواقع صور كتابية أيضاً. أصبحت هذه اللغة الجبرية في المدارس الخاصة بالإداريين في بابل جزءاً من مناهجها الدراسية لأجيال عدة، على الرغم من تتابع الإمبراطورية من حاكم إلى آخر: الكاشيون Kassites والأشوريون والميدس Medes والفرس؛ إلا أن التقاليد ظلت كما هي.

يعود تاريخ أكثر المسائل تعقيداً إلى العصور المتأخرة في تاريخ الحضارات القديمة. وأبرزها تلك المتعلقة بالعصور الفارسية و السلوقية Seleucid. لم تكن بابل في تلك الفترة مركزاً سياسياً ذا أهمية، بل ظلت لقرون عدة القلب الثقافي النابض لأعظم الإمبراطوريات، حيث امتزج البابليون بالفرس والإغريق واليهود والهندوس وشعوب أخرى. ويوجد في جميع الألواح المسمارية استمرار للتقاليد والأعراف، والتي تبدو مؤشراً للتطور المحلي المستمر. هناك قدر من الشك حول هذا التطور المحلي الذي استثار بالاحتكاك والتواصل مع الحضارات الأخرى. ومع ذلك فقد أدى هذا الدافع دوره على كلا الطرفين.

نحن نعلم أن علم الفلك البابلي كان له تأثير في الفلك الإغريقي؛ وأن الرياضيات البابلية كان لها تأثير في الحوسبة الحسابية، لذا بات من المنطقي افتراض التقاء العلم الإغريقي والهندي عن طريق مدارس الكتاب أو النساخ البابليين. أما بالنسبة لدور بلاد ما بين النهرين الفارسي والسلوقي، فإن انتشار علم فلك القدماء والرياضيات فلا يزال مجهولاً. ولكن تبين الدلائل المتاحة بأنها جديرة بالاهتمام. والجدير بالذكر أن العلوم العربية للقرون الوسطى والعلوم

الهندية كانت قائمة ليس على تعاليم الإسكندرية فحسب، بل على التعاليم البابلية أيضاً.

6

لم نعثر على أي أثر في الرياضيات الشرقية حول محاولة ما نطلق عليه إثباتاً أو برهاناً. لم تقدم أي مناقشة أو حجج، ولكن كانت بمثابة وصف لقواعد معينة: "افعل كذا وكذا". ونحن نجهل تماماً الطريقة التي تم فيها إيجاد المبرهنات: فعلى سبيل المثال، كيف توصل البابليون إلى مبرهنة فيثاغورس؟ توجد محاولات عديدة لشرح الطريقة التي توصل بها المصريون والبابليون إلى نتائجهم، ولكن جميعها ذات طبيعة افتراضية. بالنسبة لأولئك الذين تلقوا تعليمهم حسب حجج إقليدس الصارمة، فإن الأسلوب الشرقي في التفكير يبدو للوهلة الأولى ليس مقنعاً إطلاقاً، ولكن سرعان ما تزول هذه الدهشة عندما يتم التيقن بأن معظم الرياضيات التي ندرّسها في وقتنا الراهن إلى طلاب الهندسة والفنيين هي في واقع الأمر خاضعة بفعل القاعدة "افعل كذا وكذا" دون الخوض في عناء الإثبات الدقيق. لا يزال الجبر يدرس في المدارس الثانوية باعتباره مجموعة من القواعد، وليس علماً استنباطياً. وكما يبدو أن رياضيات المشرق لم تتحرر من التأثير الألفي [المؤمن بالعصر الألفي السعيد] لقضايا التكنولوجيا والإدارة بالطريقة التي تم اختراعها.

٦

تحدد قضية التأثير اليوناني والصيني والبابلي من الدراسة المعمقة لرياضيات الهنود القدماء. كان المواطنون الهنود والباحثون الصينيون يصرون - ولا يزال بعضهم - على رياضياتهم القديمة، ولكن لا توجد نصوص وكتابات رياضياتية يمكن تحديد تاريخها قبل الحقبة المسيحية. يعود تاريخ أقدم النصوص الهندية إلى القرون

الأولى ب.م. ويعود تاريخ أقدم النصوص الصينية إلى الحقبة نفسها، أو ربما قبل ذلك بقليل. ما نعلمه تماماً هو أن الهنود القدماء استخدموا الأنظمة العشرية في الترقيم، دون اللجوء إلى رموز القيمة المكانية، لذا تشكل هذا النظام تحت ما يسمى بأرقام البراهمة Brahmi numerals، والذي يتمتع بإشارات خاصة لكل الأعداد 1,2,3,...,9,10; 20, 30, 40, ...,100; 200,300,...,1000; 2000,...، والتي يعود تاريخها إلى الملك أشوكا Ashoka (قرابة 300 ق.م).

يوجد هناك ما يسمى أجزاء/مجلدات سولفاستراس Súlvasūtras، والتي يعود تاريخها إلى ق.م أو قبل ذلك. وتحتوي هذه الأجزاء على قواعد رياضياتية قد تكون من أصول محلية قديمة. وجدت هذه القواعد من بين النواميس الشعائرية أو الطقسية، وبعضها يتعامل مع بناء المذابح. كما نجد وصفات لبناء وتشييد المربعات والمستطيلات، وتعبيرات عن علاقة القطر وأضلاع المربع، وكذلك تكافؤ الدوائر والمربعات. هناك بعض المعارف المتعلقة بمبرهنة فيثاغورس لحالات محددة، وهناك تقريبات غريبة بدلالة كسور الوحدة، كما هو آتٍ (حسب رموزنا الحالية):

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4.3.4} (= 1.4142156)$$

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8})^2$$

$$= 18(3 - 2\sqrt{2})$$

والحقيقة اللافتة هنا أن نتائج هذه الأجزاء لم تظهر في الأعمال الهندية المتأخرة، مما يوضح أنه لا يمكننا التفوه بعد عن استمرارية ذلك التقليد في الرياضيات الهندية باعتبارها نسخة طبق الأصل لرياضيات نظيرتها المصرية والبابلية، فقد تكون هذه الصلة غائبة إلى حد ما لكون الهند بلد واسع الأرجاء، فلا بد من أن هناك أعراف وتقاليد مختلفة مرتبطة بمختلف المدارس الفكرية. نحن نعلم أن العقيدة الجينية Jainism والتي هي قديمة قدم البوذية (قرابة 500 ق.م) كانت تشجع على الدراسات الرياضياتية، فمثلاً نجد في كتب الجينية المقدسة قيمة للنسبة π ($\pi = \sqrt{10}$)[1].

1- B. Datta, "The Jaina School of Mathematics", Bull. Calcutta Math. Soc., Vol.21 (1929), pp.115-146.

8

إن نقص الترجمات هي سبب في إعاقة دراسة الرياضيات الصينية القديمة، على الرغم من توافر معلومات ممتازة في كتب ميكامي Mikami و نيدام Needham المتعلقة بالإنجازات الرياضياتية الصينية. أما أولئك الذين يتقنون اللغة الروسية فيمكنهم الحصول على معلومات أكثر، من ضمنها ترجمة الكلاسيكيات الرياضياتية لـ شو شانغ سون - شو Chiu ch'ang Suan-shu (عبارة عن تسعة فصول حول الفنون الرياضياتية). هذا الكتاب وآخر لـ شاو - بي Chou-pei الذين يعود تاريخهما إلى سلالة هان Han (206 ق.م إلى 220 ب.م)، وربما يحتويان على معلومات أقدم من ذلك. يعتبر كتاب شاو - بي جزئياً رياضياتياً. وهو مشوق لأنه يحتوي على مناقشة لبرهنة فيثاغورس. أما الفصول التسعة فهو كتاب رياضياتي برمته، يتميز بطبيعة الرياضيات الصينية القديمة على مدى الألف سنة القادمة أو أكثر.

هناك أشكال قديمة جداً يمكن إيجادها في الكتابين. ويعود تاريخها إلى عصر هان، مثل: آي - شينغ I-ching (كتاب التغييرات). وأحد هذه الأشكال هو المربع السحري (لو - شو lo-shu):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

الذي ترتبط به الكثير من الأساطير.

ظل الترقيم الصيني عشرياً، ولكن في الألفية الثانية ق.م نجد أعداداً يعبر عنها بتسعة رموز وبقيمة مكانية، ولكن لم يستقر هذا النظام إلا في ظل حكم هان، أو ربما قبل ذلك، فالأعداد التسعة يعبر عنها بترتيب عصا الخيزران، فمثلاً ΠΠΠ ≡ Π ⊥ ويعني 6729 وهكذا كانت تكتب دائماً.

كانت العمليات البدائية تجرى على لوحات العد، حيث يوضع الصفر في الفراغات (ظهر أول رمز خاص للصفر في القرن الثالث عشر م، أو ربما أقدم

من ذلك). وفي حساب التقاويم هناك نوع من النظام الستيني كان يستخدم ويمكن مقارنته إلى حد ما بضم عجلتين مسننتين متصلتين، أحدهما مكونة من 12 سناً، والأخرى من 10 أسنان، بحيث تكون "الدورة" من 60 وحدة ("دورة في كاثي" cycle in Cathy من أشعار تينيسن Tennyson).

تحتوي رياضيات "التسعة فصول" على مجموعة من المسائل مع قواعد عامة لحلها، فهي ذات صفة حسابية، وتؤدي إلى معادلات جبرية بعوامل عددية، كما يمكن حساب الجذور التربيعية والتكعيبية: مثال على ذلك، وجد أن العدد $751\frac{1}{2}$ هو الجذر التربيعي للعدد $564752\frac{1}{4}$.

ولقياسات الدائرة أخذت قيمة π على أنها تساوي 3 . هناك مجموعة من المسائل تؤدي إلى منظومات من المعادلات الخطية الآتية:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26$$

والتي كتبت على صورة مصفوفة matrix مع عواملها. أما بالنسبة للحل فقد كان يتم عن طريق ما نسميه الآن تحويلات المصفوفة، كما نجد في هذه المصفوفات أعداداً سالبة تظهر لأول مرة في التاريخ.

وللرياضيات الصينية مكانة استثنائية، حيث إن تقليدها بقي عملياً سليماً حتى وقتنا الحاضر، لذا بوسعنا أن ندرس مكانتها في المجتمع بصورة ما أفضل من الرياضيات المصرية والبابلية التي تنتمي إلى الحضارات البائدة. نحن نعلم على سبيل المثال، أنه يحتم على المتقدمين للامتحان أن يفصحوا عن معرفة شاملة وبدقة عن الكلاسيكيات، وهذا في حد ذاته قائم على أساس قدرة الاستشهاد الصحيح للنصوص عن ظهر قلب، لكون المعرفة التقليدية تتناقل بمعاناة شديدة من جيل إلى جيل. وفي ظل هذا الوسط الثقافي الجامد قد تصبح الاكتشافات الجديدة غير اعتيادية واستثنائية. وهذا بالتالي يؤدي إلى الجمود في التقليد الرياضياتي. وقد يتناقل هذا الإرث من جيل إلى آخر، لا آلاف السنين. ونادراً ما ينتابه التغيير نتيجة كارثة تاريخية كبيرة.

الوضع نفسه قائم في الهند. ولدينا أمثلة لنصوص رياضياتية كتبت على صورة مقاطع شعرية كي يسهل حفظها عن ظهر قلب. وليس هناك سبب محدد للاعتقاد باختلاف ممارسة المصريين القدماء والبابليين عن الهنود والصينيين. وإن ظهور حضارة جديدة متكاملة هي ضرورية لتقف إزاء تحجر الرياضيات. ولقد جاءت أخيراً النظرة المختلفة حول سمة حياة الحضارة الإغريقية لترفع الرياضيات إلى مستوى العلوم الواقعية.

الفصل الثالث

اليونان

1

طرأت تغيرات اقتصادية وسياسية هائلة حول وفي حوض البحر الأبيض المتوسط أثناء القرون الأخيرة من الألفية الثانية. ونتيجة الأجواء المضطربة من الهجرات والحروب استبدل العصر البرونزي بما يسمى عصرنا، وهو عصر الحديد. قليلة هي التفاصيل التي نعرفها عن حقبة هذه الثورات، ولكننا نجد مع نهايتها، أي قرابة 900 سنة ق.م سقوط الإمبراطوريتين المينوية Minoan لحضارة جزيرة كريت القديمة 3000-1100 ق.م] و الحثية Hittite لشعب فتح آسيا الصغرى وسورية في الألف الثاني ق.م]، بالإضافة إلى انهيار قوى المصريين والبابليين. وجاءت شعوب جديدة لتأخذ مكانها التاريخي، وأبرز هذه الشعوب: العبريون والآشوريون والفينيقيون واليونانيون. لم يجلب استبدال البرونز بالحديد الحروب فحسب، بل وجلب كذلك انخفاضاً في أسعار أدوات الإنتاج وزيادة في الفائض الاجتماعي، مما حفز التجارة وسمح لقطاع كبير من الناس بالمشاركة في القضايا الاقتصادية والمصلحة العامة. انعكس هذا في ابتكارين عظيمين: استبدال الحروف الغامضة للمشرق القديم بأبجدية سهلة التعلم، وإدخال العملة المعدنية التي ساعدت على تحفيز التجارة. وهكذا حان الوقت لأن تكون الثقافة غير مقصورة على نطاق الشرق الرسمي.

كانت نشاطات "روّاد البحر" مثل بعض المهاجرين منقوشة في النصوص المصرية. وهي بالأصل مصحوبة بخسائر ثقافية هائلة، فعندما اندثرت الحضارة المينوية وهبط الفن المصري، وجمد العلم المصري والبابلي لقرون، لم تأت إلينا أي

كتابات رياضياتية أثناء فترة التحول هذه. ولكن بعدما استقرت الأمور وعادت العلاقات إلى مجاريها، تعافى الشرق القديم في ظل المسارات التقليدية الرئيسة، ولكن المرحلة أعدت لنمط جديد من الحضارة، إنها حضارة الإغريق (اليونان).

لم تكن المدن التي برزت على ضفاف آسيا الصغرى وعلى أراضي اليونان الأم مراكز إدارية لمجتمعات الري بعد الآن، بل غدت مدناً تجارية من حيث أنه تحتم على أرباب إقطاع العصور القديمة أن يواجهوا المعركة الخاسرة بصدر رحب لطبقة التجار. كانت هذه الطبقة في القرنين السادس والسابع ق.م ذات سطوة وهيمنة، ولذا وجب عليها أن تناضل في معاركها ضد التجار الصغار والمحاربين من سواد الشعب. وكانت النتيجة ظهور ساسة إغريق ودولة مدنية ذات حكم ذاتي. ولا ريب أنها تجربة اجتماعية جديدة لا مثيل لها تختلف تماماً عن دويلات المدن السومرية والمناطق المشرقية الأخرى. إن أهم هذه المدن هي تلك التي تطورت في أيونيا Ionia على ضفاف الأناضول.

كان نمو التجارة في هذه المناطق متصلاً على طول سواحل البحر الأبيض المتوسط، وكذلك ببلاد ما بين النهرين ومصر وَسثيا Scythia، وحتى مع دول أخرى. وقد أخذت ملطيس Milete الصدارة طوال عهود. ونالت دول أخرى الواقعة على السواحل الأهمية والثراء: أما في اليونان الأم، كانت مدينة كورنث وأثينا فيما بعد، وعلى السواحل الإيطالية كانت كروتون Croton وتارينتم Tarentum وصقلية وساركيوز.

خلق هذا النظام الجديد إنساناً من نوع آخر. ولم ينعم التاجر بالكثير من هذه الاستقلالية، لكنه يعلم أنها نتاج صراع مرير. ولم تكن نظرة الشرق الهادئة من فعله، فكان يعيش في عصر اكتشافات جغرافية مقارنة بتلك التي تمت في أوروبا الغربية للقرن السادس عشر. وتيقن تماماً بأن ليس هناك حكم مطلق بعد الآن، أو قوة مفترض أن تكون لها صلة بالآلهة. وعلاوة على ذلك، بوسع التاجر أن يتمتع بقدر من الراحة نتيجة الثروة وعمل الرق؛ وباستطاعته أن يفلسف عن عالمه. وفي ظل غياب الدين المؤسس اندفع الكثير من الناس من مواطني المدن الساحلية إلى اعتناق الصوفية. وفي الوقت ذاته انطلق نقيض لذلك هو تنامي العقلانية والنظرة العلمية.

ح

ولدت الرياضيات الحديثة في هذا الجو من العقلانية الأيونية - هذه الرياضيات التي لا تطرح السؤال الشرقي "كيف" فحسب، بل السؤال العلمي الحديث "لماذا". إن الأب التقليدي للرياضيات اليونانية هو التاجر طاليس Thales الملطي Milete الذي جال في بابل ومصر في النصف الأول للقرن السادس. وحتى لو كانت شخصيته أسطورية، فهو يقف كشيء حقيقي للأبد، رمزاً شامخاً للظروف التي في ظلها تأسست ليس الرياضيات الحديثة فحسب، بل والعلوم الحديثة والفلسفة.

كان لدراسة الرياضيات عند الإغريق الأوائل هدف أساسي واحد، هو معرفة مكانة الإنسان في الكون تبعاً للنسق العقلاني. ساهمت الرياضيات في إيجاد النظام من الفوضى، وترتيب الأفكار في ترابط منطقي، وإيجاد المبادئ والمفاهيم الأساسية. كانت الرياضيات أكثر العلوم منطقية، على الرغم من وجود بعض الشكوك عن تجار اليونان حول معرفتهم برياضيات الشرق عن طريق احتكاكهم وتنقلهم على طرق التجارة. وقد اكتشفوا أن الشرقيين لم يمسوا الجوانب المنطقية (العقلانية). لم المثلثات متساوية الساقين لها زاويتين متساويتين؟ لم مساحة المثلث تساوي نصف القاعدة في الارتفاع؟

جاءت هذه التساؤلات كإفراز طبيعي إلى أولئك الذين تطرقوا إلى تساؤلات مشابهة تتعلق بالكوسمولوجيا [علم الكونيات] والبيولوجيا والفيزياء. ولسوء الحظ لا توجد مصادر أولية تعطينا صورة واضحة عن التطور المبكر لرياضيات الإغريق، فالمخطوطات الموجودة هي من العصور المسيحية والإسلامية، وهي نادراً ما تزود بملاحظات البرديات المصرية.

لقد أعانتنا البعثات الكلاسيكية في ترميم النصوص الباقية التي يعود تاريخها إلى القرن الرابع ق.م. وبناءً عليه أصبحت لدينا نسخ موثوقة عن إقليدس Euclid وأرخميدس Archimedes وأبولينوس Apollonius وكبار الرياضياتيين

القدماء الآخرين. تمثل هذه النصوص العلم الرياضياتي بصورته المطوّرة تماماً من حيث تسلسل تطورها التاريخي، وذلك بالاستعانة بتحقيقات الشراح والمفسرين المتأخرين. أما بالنسبة إلى المرحلة التكوينية للرياضيات فإنه يجب الاعتماد كلياً على الشذرات الصغيرة المتداولة من هنا وهناك بين الكتاب المتأخرين، وكذلك على ملاحظات الفلاسفة المتناثرة، وأيضاً على مؤلفات لا تمت بصلة للرياضيات. ثمة نصوص متميزة شامخة ذات طابع نقدي ومستوى عالي قادرة بالفعل على شرح وتفسير النقاط الغامضة في التاريخ المبكر. إنها نتيجة لهذا العمل (قام بدراستها بول تانيري P.Tannery وَهيث T.L.Heath وَزوثن H.G.Zeuthen وَفرنك E.Frank وآخرون). مما يسمح لنا أن نقدم هذا العمل إلى حد ما بصورة متناسقة، ولو كان الكثير منه افتراضياً، إلا أنه يقدم صورة رياضيات الإغريق في سنواتها التكوينية.

3

ظهرت في القرن السادس ق.م قوة شرقية جديدة على أنقاض الإمبراطورية الآشورية؛ وهي دولة فارس الأخمينية Achaemenides، حيث استطاعت أن تغزو مدن الأناضول، ولكن البنية الاجتماعية على أرض اليونان الأم بقت كما هي عليه ولم تهزم. أثبط الغزو الفارسي في المعارك التاريخية لـ مارثون Marathon وَسلامس Salamis وَبليتيا Plataea، فكانت النتيجة الأساسية لانتصار الإغريق امتداد وتناغم أثينا. وغدت بوادر الديمقراطية للنصف الثاني من القرن الخامس في ظل بيرسليس Pericles في ازدهار متسارع، وبمثابة قوة محركة وراء التوسع الاقتصادي والعسكري، مع 430 ق.م أصبحت أثينا ليست رائدة للإمبراطورية اليونانية فحسب، بل مركزاً جديداً لحضارة مذهلة؛ إنه العصر الذهبي لليونان.

وضمن إطار العمل الاجتماعي والصراع السياسي قدم الفلاسفة والمعلمون نظرياتهم. وفي هذا الخضم جاءت معهم رياضيات جديدة. ولأول مرة في التاريخ تأتي مجموعة من الأفراد ذات نزعة انتقادية أطلق عليهم "سفسطائيين" لم تتقيد بالأعراف كثيراً مقارنة برجال الثقافة الذين سبقوهم. تناول هؤلاء السفسطائيون

القضايا ذات الطبيعة الرياضياتية من أجل المعرفة وحسب وليس لغرض المصلحة أو المنفعة. ساعد هذا الموقف الفكري السفسطائيين للوصول إلى أسس التفكير الدقيق، ولذا بات الأمر ملحاً لتتبع مناقشاتهم وحواراتهم. ولسوء الحظ لا توجد سوى شذرة رياضياتية كاملة لهذا العصر كتبت من قبل الفيلسوف الأيوني أبقراط Hippocrates الخيوسي Chios. تمثل هذه الشذرة درجة عالية من دقة التفكير الرياضياتي، وتتناول على نحو نموذجي بصورة تسترعي الانتباه "لا عملية" الموضوع، ومن منطلق نظري أكثر تسمى lunulae - أي الأقمار الصغيرة أو الهالات المحاطة بقوسين دائريين.

فالموضوع هو إيجاد مساحات معينة محاطة بقوسين دائريين. ويمكن التعبير عنها منطقياً عن طريق الأقطار، مرتبطة مباشرة بمسألة تربيع الدائرة، وهي القضية المركزية في رياضيات الإغريق. يوضح أبقراط في تحليله لهذه القضية[1] أن رياضياتيي العصر الذهبي لليونان لديهم نسق منظم للهندسة المستوية من حيث مفهوم الاستنباط المنطقي من قضية إلى أخرى، تم التسليم بها كلياً تسمى apagoge، ثم هناك بدايات لمفهوم البدهيات شق طريقه، كما أشار إليها أبقراط في كتابه المزعوم "المبادئ" stoicheia، وهو عنوان لجميع أطروحات الإغريق حول البدهيات، ومن ضمنها كتاب إقليدس. درس أبقراط مساحات الأشكال المستوية المحاطة بالخطوط المستقيمة والأقواس الدائرية أيضاً. ولقد درّس أبقراط أن مساحات القطاعات الدائرية المتشابهة هي تربيعات أوتارها، وكان على علم بمبرهنة فيثاغورس، وبالمثل بالنسبة للمتباينة المطابقة للمثلثات غير القائمة. الأطروحة برمتها موجودة بما يسمى في الإرث الإقليدي، ولكنها أقدم من إقليدس نفسه بقرن من الزمان.

وتعتبر مسألة تربيع الدائرة من إحدى "المسائل الثلاث الشهيرة عند القدماء"، والتي غدت في هذا العصر موضوعاً للدراسة والبحث، والمسائل الثلاث هي:

1- فيما يتعلق بالتحليل الحديث انظر
E.Landau, "Uber quadrirbare Kreisbogenzweiecke", Berichte Berliner Math,Ges.,Vol.2 (1903), pp.1-6 انظر ايضاً T.Dantzig,The Bequest of the Greeks (New York, 1955), Ch.10.

1- تقسيم الزاوية: أي تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

2- مضاعفة المكعب: أي إيجاد ضلع لمكعب بحيث يكون فيه الحجم ضعف حجم المكعب الأصلي (وتسمى هذه مسألة Delic) [إن حل هذه المسألة يبعد عنهم وباءً خطيراً: إيجاد مساحة مكان مقدس مكعب أضعافاً هو بمثابة هدية إلى الإله أبولو].

3- تربيع الدائرة: وهو إيجاد مساحة مربعة تساوي مساحة المربع المعطى.

تكمن أهمية هذه المسائل في عدم حلها هندسياً بإنشاء عدد متناهٍ من الخطوط المستقية والدوائر، عدا طبعاً الحلول التقريبية؛ ومن ثم يمكن اعتبارها بمثابة وسائل للغوص في مجالات جديدة في الرياضيات. غالباً ما يتم اختزال المسألتين الأوليتين للبحث عن خطين قطاعين هما x و y، وأن $a:x=x:y=y:b$ حيث x و b هما خطا قطاعان. تعتبر هذه المسألة امتداداً للبحث عن x من حيث $a:x=x:b$ هو تناسب هندسي، ولكن البحث عن التناسب الهندسي المضاعف لا يمكن حله بالفرجار والمسطرة وحدهما. أدى هذا البحث إلى اكتشاف القطع المخروطية وبعض المنحنيات التكعيبية والرباعية، وإلى منحنٍ متعالٍ واحد هو quadratrix. فيجب ألا تسبب الحكايات التي تم تناقلها (معجزات دلفي مثلاً) إجحافاً تجاه أهميتها الأساسية، وتظهر المسألة الأساسية بصورة تواترية من حيث ما تفرزه من حكاية أو لغز - تفاحة نيوتن ووعد كاردان Cardan المنكوث وبراميل النبيذ لـ كبلر Kepler.

بيّن الرياضياتيون على مر مختلف العصور ومن بينهم عصرنا، الصلة بين مسائل الإغريق هذه والنظرية الحديثة للمعادلات المرتبطة بمجالات الأعداد المنطقة (النسبية) والأعداد الجبرية ونظرية الزمر[1].

4

وجدت جماعة أخرى بجانب جماعة السفسطائيين المرتبطين بقدر ما بالحركة الديمقراطية. هؤلاء هم فلاسفة ذو ميول رياضياتية مرتبطين

1- F.Klein, Vortrage über aus gewahlte Fragen der Elementargeometrie (Leipzig,1895); and F.Enriques, Fragen der Elementarmathematik (Leipzig, 1907), Vol.II.

بأرستقراطيات حزبية أطلق عليهم "الفيثاغوريين" نسبة إلى مؤسسها الشامخ فيثاغورس Pythagoras. كان فيثاغورس صوفياً وعالماً ورجل دولة أرستقراطي. وبينما كان معظم السفسطائيين يؤكدون حقيقة التغير، وتحديداً الذريون أتباع ليسبوس Leucippus وَديموقرطيس Democritus. كان الفيثاغوريون يؤكدون دراسة العناصر غير القابلة للتغير في الطبيعة والمجتمع. وأثناء بحثهم عن القوانين الأبدية للكون درسوا الهندسة والحساب والفلك والموسيقى، أو كما تسمى "الرباعية"[1]. كان رائدهم المتميز هو آرخيتاس Archytas التارينتمي Tarentum الذي عاش في القرن الرابع ق.م تقريباً. وكانت مدرسته، إذا ما أخذنا بفرضية فرنك، ينتمي إليها معظم الفيثاغوريين ذوي الميول الرياضياتية. كان الحساب في هذه المدرسة أشبه بما يكون علم تأملي أو تخميني يتمتع بأساليب قليلة مشتركة مع الحساب البابلي المعاصر.

قسمت الأعداد إلى فئات: زوجية وأحادية/فردية، وزوجية مضروبة بزوجية، وأحادية مضروبة بأحادية؛ وأعداد أولية ومركبة وتامة ومثلثاتية وتربيعية وخماسية وغيرها. ومن بين النتائج المشوقة "الأعداد المثلثاتية"، والتي تمثل الصلة بين الهندسة والحساب.

فمثلاً:

```
                              .
            .               . .
      .   . .             . . .
• 1,  • • 3,  • • • 6,  • • • • 10,  إلخ.
```

وتعود تسميتنا إلى "الأعداد التربيعية" إلى التأملات الفيثاغورية:

```
                  . . .
          . .     . . .
• 1,    • • 4,  • • • 9,  إلخ.
```

والأشكال نفسها أقدم من ذلك، حيث ظهرت بعضها على الخزف الفخارية للعصر الحجري الحديث. درس الفيثاغوريون خواصها، وأضافوا طابعهم الصوفي

1ـ Quadrivium الرباعية: مجموعة الدراسات المؤلفة من الحساب والموسيقا والهندسة والفلك التي يحتويها منهج التعليم للسنوات الثلاث من درجتي البكالوريوس والماجستير في جامعات القرون الوسطى.

للعدد، ووضعوها في مركز الفلسفة الكونية التي تحاول أن تختزل جميع العلاقات إلى علاقات عدد ("كل شيء هو عدد"): فالنقطة هي "وحدة في المكان". وبدرجة الأهمية نفسها نسبة الأعداد (logos اللوغوس باللاتيني ratio). والنسب المتساوية تعبر عن مفهوم التناسب. وميزوا بين التناسب الحسابي ($2b=a+c$) والهندسي ($b^2=ac$) والتوافقي ($\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$) التي كان لها تفسير فلسفي واجتماعي.

كان الفيثاغوريون على علم ببعض خواص المضلعات المنتظمة والأجسام المنتظمة. وبينوا كيف يمكن للمستوي أن يشغل بواسطة نماذج المثلثات المنتظمة أو المربعات أو المضلعات السداسية المنتظمة والفضاءات بالمكعبات، علماً بأن أرسطو حاول فيما بعد أن يضيف مفهوماً خاطئاً، وهو أن الفضاء يمكن أن يشغل برباعي السطوح المنتظم[1]. وربما كان الفيثاغوريون على معرفة بالسطوح الثمانية الأضلع والاثني عشر ضلعاً المنتظمة؛ والشكل الأخير نتيجة معدن البيرايت [pyrite: معدن أصفر مكوّن من كبريت وحديد] الذي وجد في إيطاليا مبلوراً على هيئة أشكال ذات سطوح اثني عشرية الأضلاع ونماذج لأشكال مثل الزخارف أو رموز سحرية، والتي يعود تاريخها إلى العصور الإترورية Etruscan لنسبة إلى إتروريا، وهي بلاد قديمة في غربي إيطاليا]. ويعود تاريخها إلى الشعوب السلتية لأوروبا الوسطى إبان بداية العصر الحديدي، قرابة 900 ق.م، وفيما بعد (البيرايت هو مصدر الحديد)[2].

يعزو الفيثاغوريون اكتشاف مبرهنة فيثاغورس إلى أستاذهم الذي قيل عنه بأنه ضحى بمئة ثور للآلهة، رمز للعرفان والفضل. وكما أسلفنا أن المبرهنة كانت معروفة لدي بابل حمورابي، ولكن أول برهان عام تم التوصل إليه في المدرسة الفيثاغورية.

تنسب أكثر الاكتشافات المهمة إلى الفيثاغوريين، وبالتحديد اكتشافهم الأعداد الصماء/غير المنطقة/غير النسبية irrational، وذلك عن طريق خطوط القطع الدائرية غير القابلة للقياس. وقد يكون الاكتشاف نتيجة اهتمامهم في المعنى الهندسي للنسبة $a:b=b:c$، والذي كان يمثل رمزاً للأرستقراطية. إذاً فما هو

1- D.J. Struik, Nieuw Arch. V. Wiskunde, Vol. 15 (1925), pp.121-37.
2- F.Lindemann, Sitzungsberichte bayr. Akad. Wiss., Munchen, Vol.26(1897), pp.625-758.

الوسط الهندسي للعددين 1 و 2، والاثنان رمزان مقدسان؟ قاد هذا التصور إلى دراسة النسبة بين ضلع وقطر المربع. ووجد أن هذه النسبة لا يمكن التعبير عنها "بالأعداد"؛ أي بما نطلق عليه الأعداد المنطقة (النسبية) (الأعداد الصحيحة أو الكسور)، وهي الأعداد الوحيدة التي تعرف هكذا. يمكن تفحص الآتي كما ورده أرسطو[1]

"لنفترض هذه النسبة $p:q$ ، بحيث يمكننا اعتبار p و q عددين أوليين، إذاً $p^2 = 2q^2$ ، فإن p^2 ومن ثم p هو عدد زوجي، وليكن $p = 2r$. لابد أن يكون q عدداً أحادياً، وحيث إن $q^2 = 2r^2$ ، فلابد أن يكون عدداً زوجياً أيضاً. لم يستطع أحد أن يحل هذا التناقض، لا في الشرق ولا في عصر النهضة، بتوسيع مفهوم العدد، بل برفض نظرية الأعداد لمثل هذه الحالات، ومن ثم البحث عن تركيب/تأليف هندسي".

قلب هذا الاكتشاف المتناغم السلس بين الحساب والهندسة رأساً على عقب، والذي من المحتمل أن يكون قد حدث في العقود الأخيرة من القرن الخامس ق.م. وأصبح هذا على رأس الصعوبات الأخرى الناتجة عن الأمور المتعلقة بواقعية التغيير، مما جعل الفلاسفة ينشغلون في هذا الجدال حتى يومنا هذا. لصقت هذه الصعوبة بزينو Zeno الأيلي Elea (قرابة 450 ق.م) تلميذ برامينيدس Parmenides، وهو فيلسوف محافظ؛ من تعاليمه أن العقل وحده يستطيع أن يدرك الوجود المطلق؛ وما التغيير سوى أمراً ظاهرياً. تم التسليم بهذا باعتباره يحمل معان رياضياتية، وبالتحديد عندما دُرِست العمليات اللانهائية بالنسبة لتحديد حجم الهرم. وهنا نجد مفارقات (محيرات) paradoxes زينو وجهاً لوجه مع بعض المفاهيم القديمة الأولية المتعلقة باللانهائية في الكبر واللانهائية في الصغر. كان الاعتقاد السائد أن مجموع عدد لانهائي من الكميات يمكن أن يتعاظم كما نشاء، حتى لو كانت هذه الكميات صغيرة جداً ($\infty \times \varepsilon = \infty$)؛ وأن مجموع عدد متناهٍ أو غير متناهٍ من الكميات يساوي صفراً ($n \times 0 = 0, \infty \times 0 = 0$).

1ـ هناك إشارات فقط لهذا البرهان باعتباره مثالاً لقياس الخلف reductio ad absurdum في كتاب ارسطو Analytica Priora (I,23) وللبرهان انظر :
T.L.Heath, The Thirteen Book of Euclid's Elements (Dover reprint,1956), Vol. III,p.2.

تحدت انتقادات زينو هذه المفاهيم وخلقت مفارقاته الأربع ضجة لايزال صداها يتردد حتى يومنا هذا. واحتفظ بها أرسطو تحت مسميات معروفة بـ أخيل Achilles و السهم Arrow و التقسيم Dichotomy و المدرّج Stadium. وتم صوغها بحيث تؤكد التناقضات الموجودة في مفهومي الحركة والزمان. ولسوء الطالع لم تكن هناك محاولات مرضية لحل هذه التناقضات.

ويمكن إيضاح فحوى الحجج من مفارقتي أخيل والتقسيم التي سوف نشرحها بأسلوبنا الآتي:

أخيل: سباق بين أخيل والسلحفاة! يتحرك أخيل والسلحفاة في الاتجاه نفسه على طريق مستقيم. وللعلم فإن أخيل أسرع من السلحفاة، ولكن من أجل أن يصل إلى السلحفاة التي تتقدمه يجب عليه أولاً أن يصل إلى النقطةP التي بدأت منها السلحفاة؛ فإذا وصل إلى النقطة P تكون هي قد وصلت إلى النقطة P_1، وبهذا لا يمكن لأخيل أن يصل إلى السلحفاة حتى يتجاوز النقطة P_1، ولكن السلحفاة عندئذ قد وصلت إلى نقطة أخرى P_2. فإذا وصل أخيل إلى النقطة P_2، تكون هي وصلت إلى نقطة أخرى P_3، وهكذا. إذاً ليس بوسع أخيل أن يصل إلى السلحفاة إطلاقاً.

التقسيم: لنفترض أنني أريد الذهاب إلى النقطة B بدءاً من A. ولغرض الوصول إلى B يجب أن أقطع نصف المسافة AB_1 من AB. ولغرض الوصول إلى B_1 يجب أن أصل أولاً إلى B_2 وهي نصف المسافة بين A و B_1؛ وهكذا يستمر هذا التقسيم إلى ما لا نهاية، ومن ثم فإن الحركة لا تبدأ قطعاً.

توضح حجج زينو أن جزءاً متناهياً يمكن أن يقسم إلى عدد لانهائي من الأجزاء الصغيرة المتناهية الطول. وتوضح أيضاً وجود صعوبة في شرح ما نقصده عندما نقول إن الخط "مكوّن من نقط". ومن المرجح أن زينو لم تكن لديه فكرة عن المضامين الرياضياتية التي تحملها حججه. فالمسائل التي أدت إلى مفارقاته برزت بصورة منتظمة في سياق المناقشات الفلسفية واللاهوتية. ونحن نقر بكونها قضايا

تهتم بالعلاقة بين اللانهائية "الممكنة" potential واللانهائية الفعلية actual. وهكذا يعتقد بول تانيري Tannery أن حجج زينو موجهة بصورة خاصة ضد فكرة فيثاغورس عن الفضاء (الفراغ) باعتباره مجموعة من النقط ("النقطة هي وحدة في المكان")[1]. ومهما كانت الحقيقة فإن منطق زينو سيكون له الأثر الفاعل في الفكر الرياضياتي على مر الأجيال. ويمكن مقارنة مفارقاته بتلك التي تطرق إليها الأسقف بيركلي Berkeley في عام 1734عندما برهن أن التفاهات المنطقية قد تؤدي إلى صياغة بائسة لمبادئ حساب التفاضل والتكامل إذ لم تدعم بأساسيات سليمة.

بدأت حجج زينو تقلق الرياضياتيين حتى بعدما اكتشفت الأعداد الصماء. إذاً هل يمكن للرياضيات أن تكون علماً دقيقاً؟ اقترح تانيري أنه بوسعنا التحدث عن "افتراء منطقي صحيح" لأزمة رياضيات الإغريق. وإذا كان هذا الحال، فإن الأزمة بدأت في العصر المتأخر لحروب Peloponnesian، والتي انتهت بسقوط أثينا (404 ق.م). بإمكاننا أن نستكشف الصلة بين الأزمة في الرياضيات والنظام الاجتماعي منذ سقوط أثينا الذي قدر له أن يقطع أنفاس إمبراطورية الرق الديمقراطية ليقدم عصراً جديداً لسيادة الأرستقراطية: الأزمة التي تم حلها تحت رحمة العصر الجديد.

5

وعلى نحو نموذجي لهذا العصر الجديد في تاريخ اليونان كان هناك تزايد في الثراء لفئات معينة من الطبقات الحاكمة، تلازم معه عوز شديد وحالة من عدم الاستقرار عند سواد الشعب، فالوجود المادي للطبقات الحاكمة كان قائماً على العبودية، مما سمح لهم بقدر كبير من الرفاهية والتوجه نحو الفنون والعلوم، يقابله نفور وكره شديد لجميع الأعمال اليدوية. كانت نظرة السيد المرفه دونية إلى أولئك العبيد والحرفيين. ووجدوا في دراسة الفلسفة والأخلاق ملاذاً لهم وتخفيفاً عن الضجر.

1- P.Tannery, La géométrie grecque (Paris,1887), pp.217-61

وهناك راي آخر ادلاه B.L.van der Waerden, Math, Annalen, Vol.117(1940), pp.141-61.

ولقد عبّر أفلاطون وأرسطو عن هذا الموقف أجمل تعبير في عمل أفلاطون الموسوم "الجمهورية" Republic (ربما كتب 360 ق.م تقريباً) عن المثل وديمقراطية الرق. كانت دفاعات جمهورية أفلاطون مؤسسة على الرياعية التي تتألف من الحساب والهندسة والفلك والموسيقى بهدف الوصول إلى فهم قوانين الكون. وهكذا كان المناخ الفكري مهيأ تماماً (في فترته المبكرة) لمناقشة أسس الرياضيات والكون التأملي. وكان هناك على الأقل ثلاثة من علماء الرياضيات ممن لهم صلة بأكاديمية أفلاطون، وهؤلاء العلماء هم: أرخيتاس Archytas، و ثيوتيتس Theaetetus (توفي قرابة 369 ق.م)، و إيدوكس Eudoxus (قرابة 408-355 ق.م).

تنسب نظرية الأعداد الصماء إلى ثيوتيتس كما هو وارد في كتاب إقليدس العاشر "المبادئ". أما إيدوكس فاسمه مرتبط بنظرية التناسب التي ورد ذكرها في كتاب إقليدس الخامس، وتسمى كذلك "طريقة الاستنفاد" exhaustion method والتي تسمح بالمعالجة الصارمة والدقيقة لحساب الحجوم والمساحات، مما يعني أن إيدوكس استطاع التغلب على "الأزمة" القائمة في رياضيات الإغريق. ويعود الفضل في مد يد العون لتحديد سياق المفهوم البدهي axiomatic عند الإغريق إلى صياغاته الدقيقة، وإلى رياضيات الإغريق ككل.

خلقت نظرية إيدوكس للتناسب القطعية مع النظرية الحسابية عند فيثاغورس، التي طبقت للكميات القابلة للقياس فقط، إنها نظرية هندسية صرفة بأسلوب بدهي خالص جعلت كل الصلات بالمقادير القابلة للقياس أو غير القابلة للقياس غير ضرورية. وبالاستشهاد بالتعريف الخامس الوارد في كتاب إقليدس الخامس:

> يقال إن المقادير لها النسبة نفسها، أي المقدار الأول إلى الثاني إلى الثالث إلى الرابع. إذا أخذت أي مضاعفات متساوية مهما كانت من المقدارين الأول والثالث، وإذا أخذت مضاعفات متساوية من المقدارين الثاني والرابع، فإن المضاعفات السابقة إما سواءً أكبر أو سواءً متساوية أو سواءً أقل من المضاعفات الأخرى.[1]

1- T.L.Heath, The Thirteen Books of Euclid's Element (Cambridge, 1912), Vol. 2, pp.114 (Dover reprint,1956).

و برموزنا الحالية $a:b=c:d$ إذا كان $ma>nb$ فإنه يقتضي $mc>nd$ و $ma=nb$ يقتضي $mc=nd$ و $ma<nb$ و $mc<nd$ حيث m و n عددان صحيحان.

لقد قدر لمثل هذه التعاريف أن يتم صوغها بما يسمى "بدهية أرخميدس"، حيث تتقدم على التعريف السابق على صورة تعريف 4 في كتاب "المبادئ" لإقليدس:

يقال إن المقادير لها نسب بدلالة مقادير أخرى عندما تُضرب تكون أكبر من الأخرى.[1]

يفضل أن يسمى هذا التعريف ببدهية إيدوكس، علماً بأن نظرية الأعداد الصماء التي طوّرها ديدكند و فيرشتراس أضحت بأسلوب إيدوكس الفكري، وعلى نحوٍ حرفي. وباستخدام الطرائق الحسابية الحديثة تكون قد فتحت آفاقاً واسعةً. كانت "طريقة الاستنفاد" (أول من ذكر مفردة "يستنفد exhaust" هو سانت - فنسيه Grégoire de Saint-Vincent عام 1647) هي الإجابة التي قدمتها المدرسة الأفلاطونية إلى زينو، حيث تحاشت اللامتناهيات في الصغر الطفيفة بمجرد إلغائها واختزال المسائل التي قد تؤدي إلى اللامتناهيات في الصغر إلى مسائل تتعلق بالمنطق الصوري فحسب. فعلى سبيل المثال، عندما يراد إثبات أن حجم رباعي السطوح V يساوي ثلث حجم المنشور المتساوي القاعدة والارتفاع P، فإن البرهان يحتوي على إثبات كلا الفرضيتين $V>\frac{1}{3}P$ و $V<\frac{1}{3}P$ تؤديان إلى تفاهات. لهذا الغرض أدخلت البدهية لتحل محل بدهية أرخميدس (أو بدهية إيدوكس)، ولكن تمكن أرخميدس من صوغها بالآتي: لكلا المقدارين غير المتساويين، فإن "الأكبر يزيد على الأصغر بمقدار بحيث عندما يضاف إلى نفسه، فإنه يزيد عليه بمقدار معين من بين تلك التي يمكن مقارنتها مع مقدار آخر"[2].

1- T.L.Heath, The Thirteen Books of Euclid's Element (Cambridge, 1912), Vol. 2, pp.114 (Dover reprint,1956).

2- Archimedes, On the Sphere and Cylinder, Book I, Assumption 5. انظر T.L.Heath, The Works of Archimedes (Cambridge, 1897), p.4 (Dover,1953).

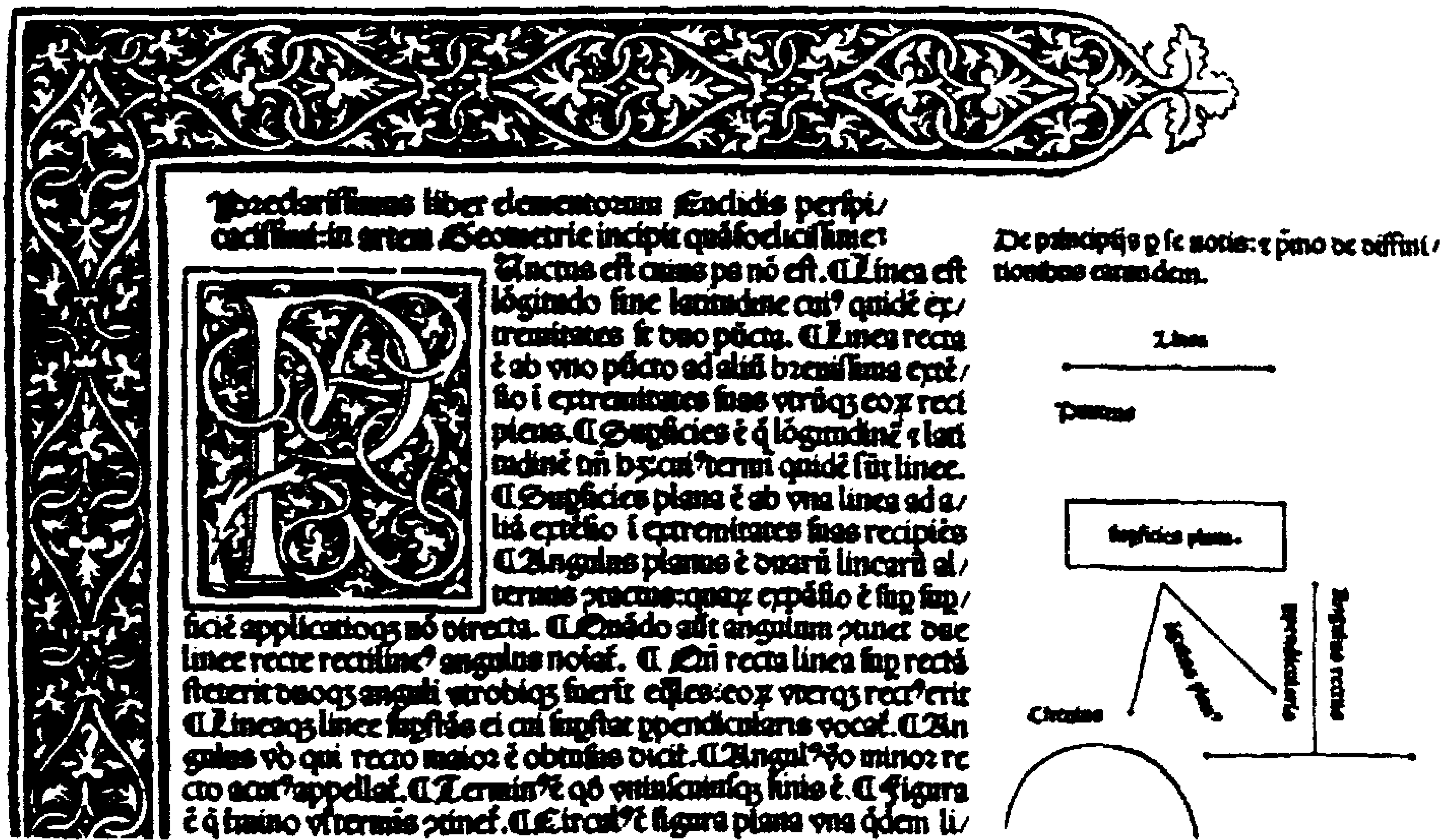
هنا التعبير "يضاف إلى نفسه" يمكن أن يعاد عدد من المرات، ففي حالة الرباعي السطوح، كانت الحجة كالآتي: تم إثبات الفرضيتين $V = A$ و $A > \frac{1}{3}P$ على أنهما تافهتان (عديمتا الجدوى)، وذلك بإحاطة رباعي السطوح بهرم مدرّج مطوّق بعدد من المناشير n كل واحد منها ذو ارتفاع $\frac{h}{n}$، حيث h هو ارتفاع رباعي السطوح؛ ومن ثم يمكن البرهنة على أن حجم الهرم المدرج يكون أقل من A عندما يكون n كبيراً جداً. وحيث إن هذا الحجم بالتأكيد أكبر من V فهنا لب التفاهة. وبالأسلوب نفسه نستطيع أن نبرهن عدم جدوى $V < \frac{1}{3}P$، وذلك بتطويق الهرم المدرج. برهن إقليدس بالأسلوب نفسه عدة فرضيات، كالمبرهنة التي تقول إن دائرتين مع بعضهما البعض هما تربيع قطريهما.

غدت هذه الطريقة غير المباشرة معياراً لبرهان قطعي لحساب المساحة والحجم عند الإغريق، وأسلوباً دقيقاً في عصر النهضة. ويمكن بكل بساطة ترجمته إلى برهان يحقق متطلبات التحليل الرياضياتي الحديث. كانت عيوبه كثيرة في البداية: ذلك أنه يشترط أن تعرف النتيجة مسبقاً بدلاً من أن تبرهن، لذا يحتم على الرياضياتي أن يجدها أولاً بطريقة أخرى أقل دقة وبمحاولات تجريبية.

هناك دلالات واضحة على وجود طريقة أخرى كانت تستخدم بالفعل. وهنا لدينا رسالة أرخميدس إلى إيرتوسثينس Eratosthenes (250 ق.م تقريباً)، والتي لم تكتشف إلا في عام 1906. وفيها وصف أرخميدس طريقة غير دقيقة ولكنها خصبة في إيجاد النتائج. تعرف هذه الرسالة "الطريقة". والتي اقترحها لوريا S.Luria، هي في حد ذاتها تمثل مدرسة في الفكر الرياضياتي تنافس مدرسة إيدوكس. ويعود تاريخها أيضاً إلى عصر "الأزمة" ومرتبطة باسم ديموقرطيس صاحب النظرية الذرية. وتبعاً لنظرية لوريا فإنه تم التعرف على فكرة "الذرية الهندسية" في مدرسة ديموقرطيس، وكان يفترض أن جزءاً من مستقيم أو مساحة أو حجم يتكون من عدد كبير ومتناهٍ من الذرات التي يتكون منها الجسم. لم يكن صدى هذه النظرية مسموعاً حتى تم التيقن من قبل رياضياتيين كثر قبل عصر نيوتن، أبرزهم كبلر Kepler الذي استخدم المفاهيم نفسها معتبراً أن محيط الدائرة يحتوي على عدد كبير جداً من أجزاء صغيرة جداً. لا توجد لدينا أدلة على أن القدماء طوّروا طريقة دقيقة لهذه الأسس، ولكن مفاهيمنا الحديثة

عن النهاية limit جعلت من الممكن أن تشيّد نظرية "الذرة" هذه إلى نظرية دقيقة شبيهة "بطريقة الاستنفاد". وحتى يومنا هذا لا نزال نستخدم مفهوم "الذرة" بصورة منتظمة في وضع المسألة الرياضياتية في نظرية المرونة أو الفيزياء أو الكيمياء، مع الاحتفاظ بدقة نظرية "النهاية" للرياضياتي المتمرس[1].

إن الميزة التي تفرق "الأسلوب الذري" عن "طريقة الاستنفاد" هي قدرتها على تسهيل الحصول على نتائج جديدة. لقد كان الخيار متاحاً للقدماء بين الدقيقة والعقيمة نسبياً والمتاحة بشكل فضفاض، ولكن أبعد من أن تكون طريقة صالحة. فضل المثقف استخدام الطريقة الأولى في جميع نصوصه الكلاسيكية، وذلك من الناحية العملية. وهذا بالتالي قد يكون مرتبطاً مع واقع أن الرياضيات أمست هواية للطبقة المترفة القائمة على الاستعباد، غير مكترثة بالاختراع، بل الراغبة في التأمل والتفكر. وقد تكون أيضاً انعكاساً لانتصار المثالية الأفلاطونية على المادية الديمقراطية في عالم الفلسفة الرياضياتية.


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime:
Punctus est cuius pars non est. Linea est longitudo sine latitudine cuius quidem extremitates sunt duo puncta. Linea recta est ab uno puncto ad alium brevissima extensio in extremitates suas utrumque eorum recipiens. Superficies est que longitudinem et latitudinem tantum habet: cuius termini quidem sunt linee. Superficies plana est ab una linea ad aliam extensio in extremitates suas recipiens. Angulus planus est duarum linearum alternus contactus: quarum expansio est super superficiem applicatioque non directa. Quando autem angulum continent due linee recte rectilineus angulus nominatur. Cum recta linea super rectam steterit duoque anguli utrobique fuerint equales: eorum uterque rectus erit. Lineaque linee superstans ei cui superstat perpendicularis vocatur. Angulus vero qui recto maior est obtusus dicitur. Angulus vero minor recto acutus appellatur. Terminus est quod uniuscuiusque finis est. Figura est que termino vel terminis continetur. Circulus est figura plana una quidem li-

صفحة من نسخة مطبوعة لكتاب المبادئ لـ إقليدس

1- هكذا، إذا ما أخذنا التفاضلات الأولى في الاعتبار فإن جزءاً صغيراً من المنحنى القريب من نقطة يمكن اعتباره خطاً مستقيماً، وجزءاً من سطح مستوٍ، وفي غضون مدة قصيرة يمكن اعتبار الجسم متحركاً بسرعة ثابتة، وأي عمليات فيزيائية هي مجرد حدوث بمعدل ثابت.

H.V. Phillips, Differential Equations (New York,1922), p.7.

6

في عام 334 ق.م اجتاح الاسكندر الأكبر بلاد فارس. وفي عام 324 لقي حتفه ببابل، وأصبح الشرق الأدنى برمته تحت قبضة الإغريق. ويمكن تقسيم غزوات الاسكندر من بين ظهور ثلاث إمبراطوريات: مصر تحت بطليموس، وبلاد مابين النهرين وسوريا تحت سيلوسدس Seleucids، ومقدونيا تحت أنتيغونس Antigonus ومن تبعه. وحتى وادي الهند كان له أمراء إغريق، وهو بداية العصر الهلنستي Hellenism.

كانت نتائج حملات الاسكندر المباشرة نشر الحضارة الإغريقية المتقدمة على أكبر نطاق من العالم الشرقي، وهكذا أصبحت مصر وبلاد ما بين النهرين وجزءاً من الهند ذات طابع هلنستي. وانطلق الإغريق إلى الشرق الأدنى بصفتهم تجار وأطباء ومغامرين ورحل ومستأجرين. وأسست مدن حديثة العهد وعرفت بأسماء هلنستية، تحت حكم عسكري وإداري يضم خليطاً من سكان المشرق واليونان. علماً بأن الهلنستية هي حضارة حضرية، إلا أنه مع ذلك ظلت ضواحي المدن وطنية مع استمرارية وجودها بالأسلوب التقليدي. وهناك في المدن التقت ثقافة الشرق القديمة مع حضارة الإغريق المستوردة، وامتزجتا جزئياً، ومع ذلك ظل التباعد بينهما شاسعاً. تبنى الملوك الهلنستيون الأساليب الشرقية، مما حتم عليهم التعامل مع مشاكل الإدارة الشرقية، ولكنها حفزت فنون وآداب وعلوم الإغريق.

وهكذا تم نقل رياضيات الإغريق إلى بيئات وأوساط جديدة تركت معظم آفاقها التقليدية والمتمرسة تأثيرها في مشاكل الإدارة وعلم الفلك التي وجب على الشرق أن يقوموا بحلها. كان هذا الاتصال القريب بين علوم الإغريق وعلوم الشرق خصباً تماماً، وتحديداً في القرون الأولى. هناك وجهة نظر عملية فحواها أن كل الأعمال الإنتاجية، والتي نطلق عليها "رياضيات الإغريق" هي في واقع الأمر حصيلة حقبة زمنية قصيرة نسبياً 350-200 ق.م؛ تمتد من إيدوكس إلى أبولينوس، علماً بأن إنجازات إيدوكس كانت معروفة لنا عن طريق شروح إقليدس وأرخميدس فقط.

والجدير بالملاحظة أن الازدهار العظيم للرياضيات الهلنستية قد ظهر في مصر بفضل بطليموس، وليس في بلاد مابين النهرين، على الرغم من أن أكثر الحالات المتقدمة في الرياضيات الأم كان عند البابليين.

ويمكن معرفة سبب هذا التطور من واقع أن مصر كانت موقعاً مركزياً في عالم البحر المتوسط. وكانت الإسكندرية العاصمة الجديدة، حيث تم بناؤها على ضفاف البحر. وأصبحت مركزاً ثقافياً واقتصادياً للعالم الهلنستي. ولذا تخلفت بابل لكونها مركزاً نائياً عن طرق القوافل. وخفت بريقها تدريجياً لتكون عاصمة جديدة للسلوقيين Seleucids. وحسب علمنا لا يوجد آنذاك عالماً رياضياتياً إغريقياً كبيراً له صلة ببابل، وأن مدينتي أنتوخ Antioch و بيرغاموم Pergamum تابعتين إلى الإمبراطورية السلوقية وقريبتين من البحر المتوسط وبها مدارس إغريقية كبيرة. أما بالنسبة إلى تطور علم الفلك البابلي فقد وصل ذروته في ظل حكم السلوقيين ولكن الفلك الإغريقي استقبل بزخم شديد، وتعود الأهمية إلى بداية فهم أفضل. كانت هناك مراكز تعليمية أخرى بجانب الإسكندرية، ولا سيما أثينا و ساركيوز، ولكن أصبحت أثينا مركزاً تعليمياً، بينما أنجبت ساركيوز أرخميدس أعظم رياضياتيي الإغريق.

٦

ظهر العالم المحترف في هذا العصر باعتباره إنساناً كرّس حياته للبحث عن المعرفة ويتقاضى أجراً مقابل ذلك. وبعض هؤلاء المتميزين كانوا يعيشون في الإسكندرية، حيث شيّد بطليموس مركزاً رائعاً للتعليم يضم متحفاً ومكتبة. وفيهما احتفظ وتطوّر إرث الإغريق في العلم والأدب. وكان نجاح هذا المشروع ملحوظاً، فمن بين الباحثين الأوائل المرتبط اسمهم بالإسكندرية إقليدس: واحد من أكثر الرياضياتيين تأثيراً في مر العصور.

إقليدس، هذا الرجل الذي لا يعرف عن حياته شيء بصورة قاطعة، ترعرع على الأرجح في عهد بطليموس الأول (306-283 ق.م). وهو الذي لاحظ كما يُعتقَد

أنـه "لا يوجـد طريـق ملكـي إلى الهندسـة". وأكثـر كتابـات إقليـدس شـهرة وتقـدماً كتبـه الثلاثـة عـشر الموسـومة "المبـادئ" أو "الأصـول" Elements (Stoicheia). وإليـه أيضاً يعود الفضل في كتابات أخرى، من بينهـا المعنونـة التي تحتوي على مـا نطلق عليه تطبيقات الجبر في الهندسة، ولكن أسلوب عرضه كان بلغة هندسية تماماً. لا نعلم بالضبط كم عدد هذه الكتابات التي تنسب إليه وكم منهـا مجـرد تجميع لما سلف، إلا أنها مع ذلك تفصح كلها عن قدرة بارعة، عدا عن أنها أول كتابات رياضياتية كاملة وصلتنا من الإغريق القدماء.

تـأتي هيئـة كتـاب "المبـادئ" بعـد الإنجيـل مباشـرة مـن حيـث تـوالي طبعاتـه ودراسته في تاريخ العالم الغربي. صدرت له أكثر من ألف طبعة منذ اختراع الطباعة وقبـل ذلـك كانـت مخطوطاتـه سـائدة علـى نطـاق تـدريس الهندسـة. وغالبـاً مـا تؤخـذ المفاهيم الهندسية حرفياً منه، وتحديداً الكتاب الثامن أو التاسع أو الثالث عشر. ولا يزال الإرث الإقليدي يحتل الصدارة في تعليمنا الابتدائي. أما بالنسبة للرياضياتي المحترف فتأسره هذه الكتب وتبقى شيئاً لا مفر منه (على الرغم من أن طلابها غالباً ما يندبون)، وأن تركيبها المنطقي كان له أثر في التفكير العلمي أكثر من أي نص آخر في العالم.

كانـت معالجـات إقليـدس قائمـة علـى الاسـتنباطات أو الاسـتنتاجات المنطقيـة بـصورة قطعيـة للمبرهنـات، وذلـك مـن منطلـق مجموعـة مـن التعـاريف والمسلمات والبـدهيات. تتنـاول الكتـب الأربعـة الأولى الهندسـة المستوية؛ ولم تتطـرق إلى نظريـة التناسـب. وتـولي اهتمامـاً أكثـر إلى الخـواص الأوليـة للخطـوط والزوايـا والمثلثـات المتطابقة، وتساوي المساحات، ومبرهنـة فيثـاغورس (الكتـاب I القضية 47)، وحـول إنشاء مربع يساوي مستطيلاً ما؛ والمقطـع (القطـاع الذهبي)[1]، والـدائرة والمضلعات المنتظمـة. وهنـا نجـد تقـديم مبرهنـة فيثـاغورس والقطـاع الـذهبي باعتبارهمـا خـواص للمسـاحات. ويقـدم الكتـاب الخـامس نظريـة إيـدوكس للتناسـب بـصورتها الهندسـية البحتـة. وتطبـق هـذه المفـاهيم في الكتـاب الـسادس علـى تـشابه الأشـكال المستوية.

1- ربما يقصد هنا النسبة الذهبية أو العدد الذهبي $\varphi = 1.618$ الناتج عن حل المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ - المترجم

وهنا نعود إلى مبرهنة فيثاغورس والقطاع الذهبي (الكتاب VI، القضيتان 30 و 31)، ولكن باعتبارهما مبرهنات تتعلق بالنسب. هذا التعريف بالتشابه في مثل هذه المرحلة المتأخرة هي إحدى أهم الاختلافات بين عرض إقليدس للهندسة المستوية والوضع الراهن، ويجب أن تنسب إلى التأكيدات التي وضعها إقليدس حول رائعة إيدوكس لنظرية غير القابل للقياس. وتم استئناف المناقشات الهندسية في الكتاب العاشر، والتي طالما اعتبرت واحدة من مناقشات إقليدس العصية لكونها تحتوي على تصنيف هندسي للأعداد التربيعية الصماء وحلولها التربيعية، وهي ما نطلق عليه الأعداد التي تأخذ الشكل: $a\pm\sqrt{b}$ و $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$.

أما الكتب الثلاثة الأخيرة فهي تتناول الهندسة المجسمة التي تقودنا إلى الكرة. وهي كما يبدو لغاية لمنشودة، وذلك عن طريق الزوايا المجسمة وحجوم متوازي السطوح (موشور/منشور سداسي ذو أوجه متوازية الأضلاع). والمواشير والأهرامات: هي مناقشات تدور حول الأجسام الخماسية المنتظمة ("أفلاطونية")؛ والبرهان حول وجود مثل هذه الأجسام الخمسة فقط.

يركز الكتاب السابع والثامن والتاسع على نظرية الأعداد، ليس من منطلق الأساليب الحسابية، ولكن من منطلق النزعة الفيثاغورية حول قابلية تقسيم الأعداد الصحيحة وتجميع المتسلسلات الهندسية وبعض خواص الأعداد الأولية. حيث نجد هناك "خوارزمية إقليدس" المتعلقة بإيجاد القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من الأعداد، و "مبرهنة إقليدس" القائلة بوجود عدد لانهائي من الأعداد الأولية (الكتاب IX، القضية 20). وهناك مبرهنة ذات توجه محدد تحتوي على أول مسألة وصلتنا تتعلق بمفهوم الأقصى أو الأعلى مع برهان أن تربيع جميع المثلثات لمحيط معطى له مساحة قصوى (الكتاب VI، القضية 27).

أما بالنسبة للمسلمة الخامسة من الكتاب الأول (العلاقة بين "البدهيات" و "المسلمات" فهي عند إقليدس غير واضحة)، إذ إنها مرادفة لما يسمى "بدهية التوازي"، والتي تنص على أن هناك خطاً مستقيماً واحداً فقط يمكن أن يمر عبر نقطة لخط ما. ثمة محاولات قصد منها اختزال هذه البدهية إلى مبرهنة، وهي التي دفعت بعلماء القرن التاسع عشر لأن يرفعوا أسمى آيات الثناء والتقدير إلى حكمة

إقليدس باعتبارها بدهية تقود إلى اكتشافات أخرى؛ وهو ما نطلق عليه "الهندسات اللاإقليدية". وهذا ما حدث بالفعل عندما رفضت بدهية أرخميدس التي أدت إلى الهندسات اللاأرخميدسية.

لقد تحول المنطق الجبري برمته إلى شكل هندسي عند إقليدس، فتم إدخال التعبير $\sqrt{A}$ ليعني ضلع المربع الذي مساحته A. ويمثل الجداء ab مساحة المستطيل الذي ضلعاه a و b. وتم التوصل إلى حلول للمعادلات الخطية والتربيعية بواسطة التركيبات الهندسية، والتي قادت إلى ما يسمى "تطبيق المساحات". يعود هذا النمط من التعبير بدرجة أساسية إلى نظرية إيدوكس للتناسب التي رفضت التعبير العددي لأجزاء الخط المستقيم. وبهذا الأسلوب تم تناول مسألة اللاقياسية بصورة هندسية محضة، مما يقيد الحساب نفسه "بالأعداد" (الصحيحة) فقط ونسبها.

ماذا كان هدف إقليدس من كتابه "المبادئ"؟ نستطيع أن نفترض بكل يقين أنه كان يريد أن يأتي بثلاثة اكتشافات عظيمة عن مستجدات الماضي يضمها كتاب واحد: نظرية إيدوكس للتناسب، ونظرية ثيوتيتس Theaetetus للأعداد الصماء، ونظرية الأجسام الخمسة المنتظمة والتي شغلت مكاناً متميزاً في كوسمولوجية أفلاطون، وتعد هذه الثلاثة معاً من إنجازات الإغريق النموذجية.

8

يعتبر أرخميدس أعظم رياضياتيي العصر الهلنستي، إن لم يكن أعظم رياضياتيي العالم القديم. هذا أرخميدس Archimedes (287-212 ق.م) الذي عاش في ساركيوز مستشاراً للملك هيرو Hiero، هو واحد من الشخصيات العلمية القليلة في العالم القديم، فهو ليس مجرد اسم محفوظ، ولكن هناك الكثير عن سيرته الذاتية. وكما نعلم عندما سقطت ساركيوز في يد الرومان وضع أرخميدس جل مهارته الفنية قيد الاستعمال للدفاع عن مدينته. ويبدو هذا الاهتمام غريباً نوعاً ما من الناحية العملية إذا ما قورن بالنظرة الدونية لهذه الأعمال التي كانت تأخذ بها

المدرسة الأفلاطونية ومعاصريها. وخير شاهد هو التفسير الوارد في نص بلوتارخ Plutarch في عمله Vita Marcelli (XVII,4):

لقد جلبت له هذه الاختراعات الشهرة أكثر من أي إنسان آخر ذي حصافة، فهو لم يتنازل قط عن أي أعمال مكتوبة عن هذه القضايا. ولكن بالنسبة إلى الأعمال الدونية فإن الميكانيك وأي نوع آخر من الفنون الموجهة للاستخدام والصالح العام، قد كرّس جل طموحه لتلك التكهنات بما تتمتع به من جمال وبراعة، والتي هي بعيدة المنال، ومشوبة بالاحتياجات العامة للحياة.

تعود أكثر إسهامات أرخميدس المهمة في الرياضيات إلى المجال الذي نطلق عليه اليوم "حساب التكامل": مبرهنات حول مساحات الأشكال المستوية وحجوم الأجسام المجسمة. أوجد تقريباً لمحيط الدائرة عند قياس الدائرة باستخدام المضلعات المنتظمة المطوّقة والمحاطة، وبتوسيع تقريبه إلى المضلعات ذات 96 ضلعاً وجد الآتي (برموزنا الحالية):

$$3\frac{10}{71} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2018\frac{7}{40}} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} < \pi < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7} \quad (1)$$

والتي يعبر عنها بالقول إن π تساوي تقريباً $3\frac{1}{7}$.

يتحدث أرخميدس في كتابه "عن الكرة والأسطوانة" On Sphere and Cylinder عن مساحة الكرة (باعتبار أن مساحة الكرة تساوي أربعة أضعاف أكبر دائرة)، وحجم الكرة (الحجم يساوي 2/3 حجم الأسطوانة المحاطة)، أما تعبيره عن مساحة قطعة المكافئ (تمثل 4/3 مساحة المثلث المحاط بالقاعدة نفسها باعتبارها قطعة، وقمته عند نقطة بحيث يكون المماس موازياً القاعدة) فموجودة في كتابه "تربيع المكافئ" Quadrature of the Parabola. ونجد في كتابه "عن الحلزونات" On Spirals "حلزون أرخميدس" [أي منحن مستوٍ مكوّن بواسطة نقطة تلف حول نقطة ثابتة بمسافة عنها متزايدة دائماً] وبحسابات المساحة. وفي "عن المجسمات المخروطية و الكروية" On

---

1- 3.1429 >π> 3.1409 فإن الوسط الحسابي للنهاية الأعلى والأدنى هو 3.1419 =π؛ وان القيمة الصحيحة هي ...3.14159

Conoids and Speroids نجد حجم دوران السطوح التربيعية. يرتبط اسم أرخميدس بمبرهنته عن فقدان الوزن للأجسام المغمورة في سائل، والتي يمكن الحصول عليها في كتابه الموسوم "عن طفو الأجسام" On Floating Bodies، الذي يعد أطروحة في علم توازن الموائع وضغطها hydrostatics.

يجمع أرخميدس في كل هذه الأعمال الأصالة المذهلة للفكر وإتقان الأساليب الحسابية والبراهين الصارمة. وعلى نحو نموذجي لهذه الدقة والصرامة تقف "بدهية أرخميدس" التي سبقت الإشارة إليها خير شاهد. وما استخدامه المتساوق لطريقة الاستنفاد إلا لغرض البرهنة على نتائج حسابه التكاملي. لقد رأينا كيف توصل إلى هذه النتائج بأسلوب موجه أو مساعد على الكشف (بتقييم اللامتناهيات في الصغر)، ولكنه نشرها تماشياً مع المتطلبات الحاسمة للدقة.

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

σονα ἢ ὃν ,γιγ ∟′ δ′ πρὸς ψπ. δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,ε[illegible]κδ ∟′ δ′ πρὸς ψπ ἢ ὃν ,αωκγ πρὸς σμ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ′· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ,αωλη θ ια′ πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αξ πρὸς ξς· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια μ′· ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,αθ ς′ πρὸς ξς. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ ,βις ς′ πρὸς ξς, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,βιζ δ′ πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ςτλς πρὸς ,βιζ δ′, ἅπερ τῶν ,βιζ δ′ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα′· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟςγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα′· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα′.

ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι οα′ μείζων.

1 ∟′] Eutocius, γ′ AB(C). 3 ,ε[illegible]κδ] Eutocius, e corr. B, ,ετκδ ABC. ∟′] Eutocius, e corr. B, ε′ A, 3 B. 4 σμ] B²C, σν AB. ιγ′] B², ιγ′ α′ A(C); δ ιγ′ om. B. 5 ια′] B², om. AB(C). 7 ξς] C, e corr. B, σξς AB. 8 ἑκατέρας] B², εκατερα ABC. ια μ′· ἡ ΑΓ] B², *Wallis*, οιμαι AB, οιμ(·) C. πρὸς ΓΚ Eutocius. ΚΓ ἢ ὃν] B², *Wurmius*; (ΓΚ) . . (χε)ν C, κατανον A. ,αθ ς′] B²C, αος A. 10 ΛΓ] *Wallis*, ΑΓ ABC; πρὸς ΛΓ Eutocius. 13 ,ςτλς] Eutocius, B², *Wallis*, ,ςτα ς′ ABC. 14 βιζ (pr.)] e corr. B, ζιζ AC. 15 οα′] B, corr. ex ο′ α′ C, ο′ α′ A. 16 ϟςγώνου] C, ϟς πολυγωνου AB. 17 ι οα′] e corr. B, δν ο′ ια′ AB(C). 18 ι οα′] e corr. B, θ′ ια′ AC. 20 ἐλάσσονι] scripsi, ελασσων ABC. μείζονι—21 μείζων] scripsi,

صفحة من كتاب أرخميدس
توضح حساب تقدير النسبة التقريبية

تختلف مهارة أرخميدس الحسابية عن معظم الرياضياتيين الإغريق، حيث نجد روحاً شرقية بملامح إغريقية.

وتكشف هذه الروح أو اللمسة في "مسألة القطيع" إحدى المسائل المعقدة للتحليل غير المحدد الذي يمكن تفسيره باعتبارها مسألة تقودنا إلى معادلة على نمط "معادلة بل" Pell:

$$t^2 - 4729494u^2 = 1$$

والتي تم التوصل إلى حلول لها بأعداد كبيرة جداً.

وهذا دليل واحد على أن التقليد الأفلاطوني لم يهيمن كاملاً على الرياضيات الهلنستية.

DIMENSIO CIRCULI

$A\Gamma : \Gamma H < 3013\frac{1}{2}\frac{1}{4} : 780$ [u. Eutocius].

secetur $\angle \Gamma A H$ in duas partes aequales recta $A\Theta$; propter eadem igitur erit $A\Theta : \Theta\Gamma < 5924\frac{1}{2}\frac{1}{4} : 780$ [u. Eutocius] siue $< 1823 : 240$; altera[1]) enim alterius $\frac{4}{13}$ est [u. Eutocius]; quare $A\Gamma : \Gamma\Theta < 1838\frac{9}{11} : 240$ [u. Eutocius]. porro secetur $\angle \Theta A \Gamma$ in duas partes aequales recta KA; est igitur $AK : K\Gamma < 1007 : 66$ [u. Eutocius]; altera[1]) enim alterius est $\frac{11}{40}$; itaque

$A\Gamma : \Gamma K < 1009\frac{1}{6} : 66$ [u. Eutocius].

porro secetur $\angle K A \Gamma$ in duas partes aequales recta ΛA; erit igitur

$A\Lambda : \Lambda\Gamma < 2016\frac{1}{6} : 66$ [u. Eutocius],

et $A\Gamma : \Gamma\Lambda < 2017\frac{1}{4} : 66$ [u. Eutocius]. et e contrario ⟨$\Gamma\Lambda : A\Gamma > 66 : 2017\frac{1}{4}$ [Pappus VII, 49 p. 688]. sed $\Gamma\Lambda$ latus est polygoni 96 latera habentis; quare⟩[2]) perimetrus polygoni ad diametrum maiorem rationem habet quam $6336 : 2017\frac{1}{4}$, quae maiora sunt quam triplo et $\frac{10}{71}$ maiora quam $2017\frac{1}{4}$; itaque etiam perimetrus polygoni inscripti 96 latera habentis maior est quam triplo et $\frac{10}{71}$ maior diametro; quare etiam multo magis[3]) circulus maior est quam triplo et $\frac{10}{71}$ maior diametro.

ergo ambitus circuli triplo maior est diametro et excedit spatio minore quam $\frac{1}{7}$, maiore autem quam $\frac{10}{71}$.

---

1) Exspectaueris ἑκάτερος (sc. ὅρος) γὰρ ἑκατέρου (ἑκάτερα γὰρ ἑκατέρων Wallis), sed genus femininum minus adcurate refertur ad auditum uerbum εὐθεῖα, quasi sit $\Delta\Theta = 5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, $\Theta\Gamma = 780$.

2) Ueri simile est, Archimedem ipsum haec addidisse. similes omissiones durae inueniuntur p. 240, 4, 6; 242, 5, 8, nec dubito eas transscriptori tribuere, sicut etiam p. 240, 8 τὸ πολύγωνον pro ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, p. 242, 17 ὁ κύκλος pro ἡ περίμετρος τοῦ κύκλου.

3) Quippe quae maior sit perimetro polygoni (De sph. et cyl. I p. 10, 1).

μεῖζον δὲ AC, maior B, autem quam decem septuagesimunis add. B². In fine: Ἀρχιμήδους κύκλου μέτρησις A.

صفحة من كتاب أرخميدس
توضح حساب تقدير النسبة التقريبية

وعلم الفلك الهلنستي نحى بالاتجاه نفسه.

9

والآن مع الرياضياتي الهلنستي الثالث والكبير أبولينوس Apollonius مواطن بيرغا Perga (247-205 ق.م تقريباً): ها نحن نعود ثانية إلى التقليد الإغريقي الهندسي. ويبدو أن أبولينوس قد درّس في الإسكندرية وفي بيرغاموم Pergamum.

وكتب أطروحة تضم ثمانية كتب عن المخروطيات: سبعة منها كتب عليها البقاء، وثلاثة منها ترجمت إلى العربية.

ناقشت هذه الأطروحة الإهليليجيات (الناقصية) والقطع المكافئ والقطع الزائد/الهذلولي، وتم عرضها كقطاعات لمخروط دائري. وتناولت أيضاً شرحاً لنشوء المخروطيات. ونحن نعرف هذه المخروطيات بالأسماء التي وجدت في أعمال أبولينوس. وهي في الأساس تعود إلى خواص معينة لهذه المنحنيات. ويمكن التعبير عنها برموزنا الحالية بالمعادلات (الرموز المتجانسة p و q هي بمثابة خطوط عند أبولينوس)

$$y^2 = px; y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2$$

(فعندما تكون الإشارة بالموجب نحصل على قطع مكافئ؛ وإذا كانت بالسالب نحصل على شكل إهليليجي). فالقطع المكافئ هنا يعني "تطبيق"، والإهليليجي يعني "تطبيق ناقص"، والقطع الزائد هو "تطبيق زائد". لم يكن أبولينوس على علم بطريقة إحداثيتنا. ولأن الرموز الجبرية لم تكن في مرآه (ربما رفضت عن قصد نتيجة تأثير مدرسة إيدوكس) نسخت معظم نتائجه مباشرة إلى لغة إحداثية، من ضمنها خاصيته عن النشوء evolutes المطابقة للمعادلة الديكارتية[1].

ويقال أيضاً عن كتب أبولينوس الأخرى إنه تم الاحتفاظ بجزء منها، وهي تحتوي على هندسة "جبرية" بلغة هندسية متجانسة. وهنا نجد مسألة أبولينوس للماس التي تتطلب إنشاء دوائر مماسة لأي دوائر ثلاث، ويمكن استبدال الدوائر بخطوط مستقيمة أو نقط. وها نحن نلتقي مع أبولينوس لأول مرة في شكل جلي لمتطلبات التركيبات الهندسية المقيدة بالفرجار والمسطرة فحسب، علماً بأنها لم تكن من متطلبات الإغريق العامة كما كان يعتقد.

1- "إن اطروحتي هي ان جوهر الهندسة التحليلية هو دراسة المحل الهندسي loci عن طريق معادلاتها، وكان هذا الشأن معروفاً عند الإغريق واساساً في دراستهم عن القطع المخروطية".
J.L Coolidge, A History of Geometrical Methods (Oxford, 1940), p.119.
انظر ايضاً ملاحظاتنا عن ديكارت.

10

لا يمكن فك رباط الرياضيات عن علم الفلك حتى في العصور الحديثة، فالحاجة إلى الري والزراعة بوجه عام - والملاحة أيضاً - اعتمدت على الفلك باعتباره موطئ قدم لعلوم الشرق والهلنستية، ومساره يتحدد بمعرفة تامة بالرياضيات. إن المضمون الحسابي والفكري للرياضيات غالباً ما يكون مرهوناً إلى حد كبير بالفلك. واعتمد تقدمه بصورة جلية على قدرة ما تقدمه كتب الرياضيات: بنية المنظومة الكواكبية مثلاً هي نسبياً أساليب رياضياتية بسيطة تسمح بنتائج بعيدة المنال، ولكن في الوقت نفسه معقدة للغاية، لدرجة أنها تحفّز القدرة على تطوير هذه الأساليب والنظريات الفلكية. قام الشرق بتطورات ملحوظة في الحسابات الفلكية إبان الفترة التي سبقت الحقبة الهلنستية، وعلى وجه التحديد في بلاد ما بين النهرين أثناء العصور المتأخرة للأشوريين والفرس. تم رصد المشاهدات بانتظام ولمدة طويلة، مما سمح لهم باستيعاب الكثير من التقويمات الفلكية. كانت حركة القمر واحدة من تحديات المسائل الفلكية التي وضعت أمام الرياضياتي في القدم. كرّس البابليون (الكلدانيون) وعلماء القرن الثامن عشر جل جهدهم لدراسة هذه الحركة، وجلب الجمع بين العلم البابلي والإغريقي الكثير من الحسابات والتطورات النظرية أثناء عصر السلوقيين، حيث واصل العلم البابلي في التقليد التقويمي القديم، وحقق العلم الإغريقي بعض الانتصارات النظرية ذات الجدوى.

كان أقدم إسهام إغريقي معروف في الفلك النظري هو نظرية الكواكب السيارة لإيدوكس ملهم إقليدس. وكانت محاولاته قائمة على شرح حركة الكواكب (حول الأرض) مفترضاً أربع كرات دوّارة متحدة المركز لمتراكزة! لكل منها محور خاص بالدوران بنهايتين مثبتتين في الكرة المطوقة (المحاطة).

كان هذا دون شك شيئاً جديداً ونمطاً إغريقياً، بل وشرحاً، وليس ظاهرة سماوية خاضعة لتسلسل زمني. وعلى الرغم من صورتها الرثة غدت نظرية إيدوكس فكرة مركزية لجميع نظريات الكواكب السيارة حتى القرن السابع عشر،

لكونها تتضمن شروحاً عن اللاانتظامات في المسارات الظاهرية للقمر والكواكب بتطابق الحركات الدائرية، ولا تزال تخفي الجانب الحسابي لنظريتنا الحديثة للديناميك، والتي سوف نتحدث عنها عندما نتناول متسلسلات فورييه.

سار أرستارخوس Aristarchus السموسي Samos (قرابة 280 ق.م) على خطا إيدوكس الذي يعد "كوبرنيكوس القدماء"، والمدين إلى أرخميدس بالفرضية القائلة إن الشمس هي مركز حركة الكواكب السيارة وليست الأرض. فلائل هم الذين كانوا يشاطرونه هذا الزعم، على الرغم من الاعتقاد السائد على نطاق واسع عن دوران الأرض حول محورها. ولكن يعزى نجاح فرضية مركزية الشمس إلى سلطة هيبارخوس Hipparchus بالدرجة الأساسية، وهو يعد أعظم فلكيي القدماء.

توصل هيبارخوس إلى مشاهدات للفترة 161-126 ق.م، ولكن لم يصلنا إلا القليل من أعماله، ومصدرنا الوحيد لمعلومتنا عن إنجازاته وصل إلينا عن طريق بطليموس Ptolemy الذي عاش بعد ثلاثة قرون. وأكثر محتويات أعمال بطليموس الرائعة موجودة في المجسطي "المقاسات" Almagest، الذي ينسب إلى هيبارخوس، وتحديداً المتعلق باستخدام الدوائر مختلفة المراكز والدويرات الفوقية [epicycle دويرة فوقية: دائرة تتدحرج من الداخل أو الخارج حول دائرة أخرى أكبر منها]، وذلك لشرح حركة الشمس والقمر والكواكب، بالإضافة إلى اكتشاف اعتدالات الليل والنهار[1]. كما يعود الفضل إلى هيبارخوس في طريقة تحديد الارتفاع والطول باستخدام الوسائل الفلكية، ولكن القدماء لم يستطيعوا أن يحشدوا منظمة علمية كافية لعمل تطابقات كبيرة (كان العلماء الأوائل مشتتين بين النظامين الزمني والمكاني). وكانت أعمال هيبارخوس مرتبطة تماماً بإنجازات الفلك البابلي الذي وصل ذروته في هذه الحقبة. ومن هنا نجد في هذا العمل أهم ثمرة علمية للتواصل الإغريقي - الشرقي في العصر الهلنستي[2].

1ـ Equinoxes الاعتدال الربيعي أو الخريفي: هو اعتدال الليل والنهار مرتين في العام 21 مارس/آذار و 23 سبتمبر/أيلول ـ المترجم

2- O.Negebauer, Exact Science in Antiquity, Univ. of Pennsylvania Bicentennial Conf., Studies in Civilization (Philadelphia, 1941). pp.22-31; The Exact Science in Antiquity (Princeton, 1952; 2 nd. Ed, 1957).

11

يـأتي العـصـر الثالـث والأخير للمجتمـع القـديم تحـت سيطرة الرومـان، حيـث سـقطت سـاركيوز في قبضة رومـا في عـام 212 ق.م، وقرطـاج واليونـان في 146 ق.م، وبـلاد مـابين النهـرين في 64 ق.م، ومـصـر في 30 ق.م. سـيطر الرومـان كـاملاً علـى الـشرق، ومـن ضـمنها اليونـان الـتي تفـككـت إلى مـستعمرات حكمـت مـن قبـل إداريين رومان، ولكـن لم يؤثر هـذا التحكم في البنية الاقتصادية لدول المشرق طالما دفعـت الـضرائب واسـتمرت النفقـات. وطبيعيـاً، انقـسمت الإمبراطوريـة الرومانيـة إلى قسمين: غربي قائم على استغلال الزراعة لأغراض تتعلق بالاستعباد الكامل، وآخـر شرقي قائم على استغلال الزراعة ولكنه خالٍ إلى حد ما من استخدام العبيد إلا في الأعمـال المنزليـة والأعمـال العامـة. وعلـى الـرغم مـن نمـو بعـض المـدن أخـذت التجـارة تطوّق ما هـو معروف بالعـالم الغربـي. وظلـت تركيبـة اقتـصاد الإمبراطوريـة الرومانيـة قائمـة بأسـرها علـى الزراعـة. ويعـد اقتـصاد الـرق في مثـل هـذه المجتمعـات دون شـك عاملاً مميتاً لكل الأعمال العلمية الخلاقة.

نـادراً مـا يرغـب أربـاب العبيـد - باعتبارهـا طبقـة - في الاكتـشافات الفنيـة. والسبب جزئياً بإمكان العبيد القيام بالأعمال الدنيئة؛ والجزء الآخر يخشون إعطـاء العبيد أي أداة تشحذ أدمغتهم. معظم أفراد الطبقـة الحاكمـة تهوى الفنون والعلوم، ولكـن هـذا الولـع ارتقـى بالقـدرة بـدلاً مـن الـتفكير المنـتج. ومـع انهيـار الاقتـصاد الروماني سقط سوق العبيد، ووُجِدَت هناك قلة من الأفراد لقطف العلوم المتوسطة للقرون الماضية.

وطالما تباهت الإمبراطورية الرومانية ببعض من الاستقرار، فإن علوم المشرق استمرت في الازدهار باعتباره مزيجاً ملحوظاً للأصول الشرقية والهلنستية. وهكذا بدأت تخبو الأصالة والدافع تدريجياً من أيقونة السلام الروماني التي ظلت لقرون تنير التأمل الحر متمشياً مع التقاليد. فالتعايش مع السلام الروماني لقرون كان سلاماً لم يشهد له مثيل قط في القارة الآسيو - أوروبية. هذه الحقبة من السلام

الـدائم شـبيهة بـالتي كـانـت في ظـل الأنتـونيين Antonines في رومـا و هـان Han في الصين. هيأ هذا السلام انتشاراً للمعرفة على كل القارة من روما وأثينا إلى بلاد ما بين النهرين والصين والهند بكل يسر عما قبل. واستمر تدفق العلوم الهلنستية إلى إيران والهند، مما كان له التأثير في العلوم في تلك البلدان. وهكذا جاءت نفحات من الفلك البابلي ورياضيات الإغريق إلى إيطاليا وأسبانيا وبلاد الغال Gaul [السلت - فرنسا]. ومثالاً على ذلك انتشار التقسيم الستيني للزاوية وللساعة طوال حقبة الإمبراطورية.

هنـاك نظريـة يتـصدرها فوبيـك F.Woepcke ترسـم انتـشار مـا يطلـق عليـه بالأعداد الهندية - العربية على كل أرجاء أوروبا حتى تأثير الفيثاغوريين الجدد في أواخر الإمبراطورية الرومانية، بقطع النظر عما إذا كان هذا الانتشار صحيحاً أو غير صحيح. ولكن إذا كان التاريخ يعود إلى ذلك الحد، فإنه من المرجح أن يكون هذا ناتجاً عن تأثير التجارة وليس الفلسفة.

ظلت الإسكندرية مركزاً للرياضيات القديمة، واستمرت الأعمال الخلاقة على الرغم من الجمع والتصنيف والتفسير الذي أصبح أكثر فأكثر شكلاً مميزاً للعلم. معظم نتائج الرياضياتيين الأوائل والفلكيين انتقلت إلينا عن طريق أعمال هؤلاء المصنفين، ولذا يصعب أحياناً إيجاد ما تم نقله وما تم اكتشافه. وإذا ما أخذنا بمحاولة فهم التقهقر التدريجي لرياضيات الإغريق، يحتم علينا أن نأخذ بالحسبان الجانب الفني: وهو الأسلوب الهندسي المبهم في التعبير، مع الرفض المطلق للرمزية الجبرية، مما جعل أي تقدم بعد القطع المخروطية أمراً مستحيلاً. وهكذا ترك الحساب والجبر إلى الشرقيين المكرهين الذين حجبت معرفتهم بكساء الحضارة الإغريقية.

إنه من الخطأ تماماً الاعتقاد بأن الرياضيات التابعة إلى الإسكندرية هي "إغريقية" صرفة بالمعنى الإقليدي - الأفلاطوني التقليدي، فالحسابات الحسابية والجبر للنمط المصري - البابلي قد تم قطف ثماره جنباً إلى جنب بالبراهين الهندسية الصرفة. يجب علينا أن نتصور أن بطليموس و هيرون و ديوفانتس متيقنون من هذه الحقيقة؛ وأن الرابطة الوحيدة بين الأعراق المتعددة والمدارس الفكرية كانت الاستخدام الشائع عند الإغريق.

12

يعتبر نيكوماخوس Nicomachus الذي ينسب إلى غيرسا Gerasa أحد رياضياتيي الإسكندرية الأوائل للعصر الروماني (100 ب.م). ويعد عمله الموسوم "مقدمة الحساب" Arithmetic Introduction واحداً من الدراسات الكاملة والموسعة للحساب الفيثاغوري. يتناول هذا الكتاب بصورة أكبر الموضوعات نفسها الواردة في كتاب إقليدس "المبادئ". وفي الوقت الذي يقدم إقليدس الأعداد بالخطوط المستقيمة، فإن نيكوماخوس يستخدم الرموز الحسابية بلغة عادية عندما يراد التعبير عن الأعداد. فمعالجته عن الأعداد المضلعة والأعداد الهرمية كان لها أثر في حساب العصور الوسطى، وعلى وجه التحديد عبر بوتيس Boetius.

من أهم وثائق العصر الثاني في الإسكندرية "المجموعة الهائلة" لبطليموس، والمعروفة أفضل بالمسمى العربي "المقاسات" Almagest (150 ب.م). "المقاسات" هي قطعة فلكية ذات مستوى عالٍ من الإتقان والأصالة، على الرغم من أن معظم الأفكار الواردة هي من أعمال تعود إلى هيبارخوس Hipparchus أو كدنو Kidinnu وفلكيين بابليين آخرين. تحتوي هذه المجموعة على حساب المثلثات، بالإضافة إلى جداول لأوتار الدوائر لمختلف الزوايا بدءاً بمنصفات الزوايا المساوية لجداول الجيب حسب الصيغة: الوتر $\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$ حيث $R = 60$.

أوجد بطليموس قيمة للوتر $1°$ وهي $(1,2,50) = \frac{1}{60}+\frac{2}{60^2}+\frac{50}{60^3} = 0.017453$ وقيمة النسبة التقريبية π وهي $(3,8,30) = \frac{377}{120} = 3.14166$.

نجد في "المقاسات" صيغة للجيب sine وجيب تمام cosine لمجموع وفرق الزاويتين، بالإضافة إلى بدايات حساب المثلثات الكروي. لقد تم التعبير عن المبرهنات بالشكل الهندسي (تعود رموزنا الحالية لحساب المثلثات إلى آويلر في القرن الثامن عشر). ونجد في هذا الكتاب كذلك "مبرهنة بطليموس" المتعلقة برباعي الأضلاع المحاط بدائرة. أما في عمل بطليموس المعنون Planisphaerium،

فنحصل على مناقشة عن الإسقاط الأستروغرافي [فن تصوير الأجسام الصلبة على سطح مستوٍ]. وفي عمله "الجغرافيا" Geographia نرى تحديداً بالارتفاع والطول لموقع أماكن على الأرض، وهي مجرد أمثلة قديمة للإحداثيات على الكرة. يتضمن الإسقاط الأستروغرافي على تشييد الإسطرلاب تلك الأداة التي تستخدم في تحديد موقع الأرض، والتي كانت معروفة أصلاً عند القدماء. وكانت تستخدم على نطاق واسع إلى أن استحدثت الثمنية octant [أداة لقياس الزوايا ذات قوس مقسم إلى 45 درجة]. وأخيراً السدسية sextant [آلة السدس لقياس ارتفاع الأجرام السماوية من سفينة أو طائرة متحركة] في القرن الثامن عشر[1].

ويوجد هناك من هو أقدم من بطليموس، وهو مينلوس Menelaus (100 ب.م تقريباً)، الذي يحتوى عمله الموسوم "الكرة" Sphaerica على هندسة الكرة ومناقشة حول المثلثات الكروية، وهي المادة المفقودة عند إقليدس. وهنا نجد "مبرهنة مينلوس" للمثلث وامتداده للكرة، في الوقت الذي يحتوي فيه فلك بطليموس على معالجة جيدة للأعمال الحسابية عن الكسور الستينية. وأطروحة مينلوس هذه هي في حد ذاتها هندسية بتقليد إقليدي بحت.

وفي عصر مينلوس نجد هيرون؛ نجده يصف بدقة خسوف القمر لعام ب.م. يعد هيرون كاتباً موسوعياً، حيث كتب في الهندسة والحساب والميكانيك. وتوضح كتاباته مزيجاً رائعاً بين الأسلوبين الإغريقي والشرقي. وعمله الموسوم Metrica يقدم لنا اشتقاقه للصيغة التي تحمل اسمه "صيغة هيرون" لإيجاد مساحة المثلث، والتي يعبر عنها:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

بصورة هندسية صرفة. تنسب هذه الفرضية إلى أرخميدس. ونجد أيضاً في Metrica كسور الوحدة عند المصريين، كما هو في التقريب

$$\sqrt{63} = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

ويمكن رد صيغة هيرون لحجم الهرم الرباعي الناقص إلى إحدى موجودات برديات موسكو القديمة. وما قياساته لحجم خماسي الأضلاع المنتظم إلا وحياً إقليدياً.

1- H. Michel, Traite de l'astrolabe (Paris, 1947) وأيضاً History of Astrolabe, Isis, Vol.40 (1949), pp.240-56 The Early.

13

لقد كان طابع الشرق قوياً جداً في كتاب "الحساب" Arithmetica لـ ديوفانتس Diophantus (250 بم تقريباً). ولكن لم تصلنا سوى ست نسخ من الكتاب الأصلي. أما عدد النسخ الكلي فبات مسألة تخمين. ولكن توضح معالجته البارعة للمعادلات غير المحددة على أن الجبر القديم للبابليين أو ربما للهنود لم يكتب له البقاء في ظل الجزء المخفي لحضارة الإغريق، ولكن تم تطويره من قبل قلة من الدارسين النشطين. كيف ومتى تم ذلك؛ هذا أمر غير معروف، كما هو الحال مع ديوفانتس، الذي نجهل الكثير عن شخصه (قد يكون بابلياً متهلنساً لنسبة إلى الهلنستية). يعد كتاب ديوفانتس واحداً من الأطروحات المشوقة التي تحتفظ بأعمال قدماء اليونان والرومان.

تحمل مجموعة مسائل ديوفانتس تغييراً شاسعاً، وحلولها غالباً ما تكون قمة في الإبداع، حيث يحتوي "تحليل ديوفانتس" على إيجاد أجوبة للمسائل غير المحددة مثل:

$$Ax^2 + Bx + C = y^2$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$$

أو مجموعات من هذه المعادلات. يرغب ديوفانتس على نحو نموذجي في الحلول المنطقة (النسبية) الموجبة. وكان يطلق على الحلول الصماء بالمستحيلة. وكان حذراً جداً في اختيار عوامله، بحيث تكون حلول منطقة موجبة. وهذا ما كان يبحث عنه. ومن بينها نجد المعادلات:

$$x^2 - 26y^2 = 1$$

$$x^2 - 30y^2 = 1$$

والمعروفة حالياً بمعادلات بالـ Pell.

كانت لدى ديوفانتس عدة فرضيات تتعلق بنظرية الأعداد، مثل المبرهنة (III,19)، التي تنص على أنه إذا كان لكل عددين صحيحين مجموع تربيعين، فإن حاصل ضربهما يمكن حله بطريقتين إلى تربيعين. وهناك مبرهنات حول تقسيم العدد إلى مجموع ثلاثة وأربعة تربيعات.

نجد عند ديوفانتس أول استخدام منتظم للرموز الجبرية، حيث يوجد رمز خاص للمجهول وللسالب وللمقلوب. ولا تزال تتمتع هذه الرموز بطبيعة اختصارية، وليست رموزاً جبرية بالمعنى الذي نعرفه (تشكل بما يسمى "بلاغة" الجبر). ويوجد لكل أس للمجهول رمزاً خاصاً به[1].

ليس ثمة ريب هنا، فنحن لسنا بصدد المسائل الحسابية البابلية ذات الطبيعة الجبرية فحسب، بل بصدد رموز جبرية متطورة تماماً لها علاقة بحلول المسائل المعقدة جداً، خلافاً لما ألفناه من قبل.

14

إن آخر أعظم الأطروحات الرياضياتية التابعة إلى الإسكندرية هي التي كتبها بابوس Pappus (مع بداية القرن الرابع). وتسمى مجموعة أعماله (Synagoge): وهي على هيئة دليل لدراسة هندسة الإغريق تتخلله حواشٍ تاريخية وتصويبات وتعديلات للمبرهنات القائمة والبراهين. ولا يمكن قراءته بمفرده، أي بصورة مستقلة دون الرجوع إلى الأعمال الأصلية. إن معظم نتائج الكتاب القدماء معروفة بالشكل الذي احتفظ به بابوس. وتوجد هناك أمثلة ومسائل تتناول تربيع الدائرة ومضاعفة المكعب وتقسيم الزاوية. والأكثر تشويقاً الفصل الذي تناول فيه الأشكال متساوية المحيط، من حيث نجد أن الدائرة لها مساحة أكبر من المضلع المنتظم متساوي المحيط. وهنا نجد إشارة إلى أن خلايا قرص العسل تحقق خواص قصوى - دنيا معينة[2]. لقد عرفت مجسمات أرخميدس شبه المنتظمة عن طريق بابوس أيضاً. وتعد مجموعة أعمال بابوس بمثابة تحدٍ نصيبها كنصيب

1- تحتوي بردية رقم 620 التابعة لجامعة ميتشيغان Michigan التي تم نيلها عام 1921 على بعض مسائل جبر الإغريق التي يعود تاريخها إلى قبل ديوفانتس، وربما إلى بداية القرن الثاني بم وبعض الرموز وجدت في مخطوط ديوفانتس نفسه انظر:
F.E. Robbins, Classical Philology, Vol.24 (1929), pp.321-29: K.Vogel, ibid, Vol.25, pp.373-75.

2- هناك مناقشة كاملة لهذه المسألة في كتاب:
D'Arcy W.Thompson, Growth and Form, 2 nd ed (Cambridge, 1942).

كتاب ديوفانتس "الحساب"، حيث ألهمت مسائله الكثير من البحث والتقصي في الأيام الأخيرة.

وماتت مدرسة الإسكندرية تدريجياً مع سقوط المجتمع القديم. وبقي بوجه عام حصن الوثنية الحصين بالمرصاد أمام تقدم المسيحية. وترك عدد من علمائها الرياضياتيين آثاراً في تاريخ الفلسفة القديمة. بروكلوس Proclus (410-485) الذي يعد عمله "Commentary on the First Book of Euclid "تعليقات على الكتاب الأول لإقليدس" واحداً من مصادرنا الرئيسة لتاريخ رياضيات الإغريق، كما يحتل الصدارة عند المدرسة الأفلاطونية المحدثة في أثينا. وهناك ممثل آخر لمدرسة الإسكندرية هي هيباتيا Hypatia التي كتبت شروح وتعليقات عن الرياضياتيين الكلاسيكيين، ولاقت حتفها قتلاً في عام 415 من قبل أتباع سانت سيرل St.Cyril. ذلك المصير ألهم الروائي تشارلز كنجزلي Charles Kingsly بكتابة رواية تحمل عنوان "هيباتيا"[1]. وكان لهذه المدارس الفلسفية بشروحها وتعليقاتها صعوداً ونزولاً على مر العصور. وتوقفت الأكاديمية في أثينا باعتبارها وكراً "وثنياً" بأمر الإمبراطور جوستين Justinian (529)، ولكن في الوقت نفسه أنشئت مدارس في مناطق أخرى مثل اسطنبول و جوند شابور Jandishapur. وهكذا كتب البقاء لبعض النصوص في اسطنبول، بينما واصل الشراح في تخليد ذكرى علوم وفلسفة الاغريق باللغة اليونانية.

وفي عام 630 وقعت الإسكندرية في يد العرب الذين استبدلوا الطبقة المميزة لحضارة الإغريق في مصر بطبقة عربية مميزة. وليس هناك مبرر للاعتقاد بأن العرب حطموا مكتبة الإسكندرية الشهيرة، إذ إن وجود المكتبة أصلاً آنذاك هو أمر مشكوك فيه. وفي الواقع لم يغير الفاتحين العرب طابع الدراسات الرياضياتية في مصر، وقد يكون هناك نوع من التراجع. ولكن عندما نسمع عن رياضيات مصر مرة أخرى فإنها لا تزال تتبع التقليد الإغريقي - الشرقي (الحسن[2] نموذجاً).

1- C.Kingsley, Hypatia (1853) وكتب F.Mauthner رواية باللغة الألمانية تحت عنوان Hypatia (1892).

2- يقصد المؤلف هنا الحسن ابن الهيثم - المترجم

15

ونختم هذا الفصل ببعض الملاحظات عن حساب و لوجستيكية الإغريق. لقد فرّق رياضياتيو الإغريق بين "الحساب" arithmetica أو علم الأعداد arithmoi، واللوجستيك logistics أو الحسابات العملية. تعبّر مفردة airthmos عن العدد الطبيعي، باعتباره "كمية مؤلفة من وحدات" (إقليدس، الكتاب VII التعريف 2، وهذا يعني أن العدد "واحد" ليس بعدد). إن مفهومنا عن الأعداد الحقيقية ليس معروفاً، كما أن جزء الخط المستقيم ليس له طول دائماً، لذا فإن الفكر الهندسي حل محل علمنا عن الأعداد الحقيقية، فعندما حاول إقليدس أن يعبر عن مساحة المثلث بأنها حاصل جداء نصف القاعدة في الارتفاع، وجب عليه أن يعلن عنه بأنه نصف مساحة متوازي الأضلاع للقاعدة نفسها ويقع بين المتوازيات نفسها (إقليدس I، 41). إن مبرهنة فيثاغورس هي علاقة بين مساحات ثلاثة مربعات، وليس بين أطوال ثلاثة أضلاع. يحتوي "المبادئ" لإقليدس على نظرية للمعادلات التربيعية، ولكن تم التعبير عنها بما يسمى تطبيق المساحات، وحيث إن الجذور (الحلول) هي جزء من مستقيمات يمكن إيجادها بالقيام بإنشاءات معينة، فيمكن أن يقال إن الحلول الموجبة فقط هي التي تؤخذ.

وهكذا، فإن "المبادئ" تعتبر أن الجزء من الخط المستقيم ليس بالضرورة أن تكون له قيمة عددية متصلة به. وهذه المفاهيم المتعلقة بالمستقيمات والأعداد يجب أن تؤخذ بالحسبان بقدر من الإسهاب، وذلك مع انتصار المثالية الأفلاطونية ضمن قطاعات الطبقة الحاكمة الإغريقية التي تهتم بالرياضيات، حيث إن المفاهيم الشرقية المعاصرة المتعلقة بعلاقة الجبر والهندسة لم تضع شرطاً أو قيداً إزاء مفهوم العدد. هناك سبب يحملنا على الاعتقاد بأن البابليين ومبرهنة فيثاغورس هي مجرد علاقة عددية بين أطوال الأضلاع؛ وأن هذا النمط من الرياضيات هو الذي دفع الرياضياتيين الأيونيين Ionian بمعرفته.

تعرف رياضيات الحسابات العادية بأنها "لوجيستية". وظلت تحمل هذا المفهوم طوال عصور التاريخ الإغريقي. وفي الوقت الذي رفضها إقليدس، نجد أن

أرخميدس و هيرون أخذا بها، واستخدمت ببساطة ودون أي ريبة. وكانت قائمة في الواقع على نظام الترقيم الذي يتغير مع الزمن، حيث كانت طريقة الترقيم الأولية عند الإغريق قائمة على أساس مبدأ التجميع العشري، كما هو متداول عند المصريين والرومان. وجدت طريقة في عصور الإسكندرية، وربما قبل، في كتابة الأعداد. وكانت تستخدم لأكثر من خمسة عشر قرناً، ليس من قبل العلماء فحسب، بل حتى التجار والإداريين. تستخدم هذه الطريقة الأبجدية الإغريقية لتعبر أولاً عن رموزنا 1، 2، 3، ...، 9، ثم العشرات من 10 إلى 90؛ وأخيراً المئات من 100 إلى 900 ($\alpha=1$ و $\beta=2$ .. إلخ). هناك ثلاثة حروف مهجورة إضافية تمت إضافتها إلى حروف الهجاء الإغريقية الأربعة والعشرين، وذلك بغرض الحصول على 27 رمزاً. وتبعاً لهذا النظام يمكن كتابة أي عدد أقل من 1000 بثلاثة رموز على الأكثر، فمثلاً يمكن كتابة العدد 14، $\iota\delta$ حيث $\delta=4$ و $\iota=10$، أما الأعداد التي هي أكبر من 1000 فيمكن بكل بساطة توسيع النظام. كان هذا النظام معمولاً به في مخطوطات أرخميدس و هيرون وكل الكتاب الكلاسيكيين. وهناك دليل تم الحصول علية من الآثار يوضح أنه كان يدرس في المدارس.

يعتبر نظام الأعداد هذا نظاماً عشرياً غير موضعي؛ أي كلاً من $\iota\delta$ و $\delta\iota$ تعبران عن العدد 14. فالعيب في القيمة المكانية. واستخدام أقل من 27 رمزاً جعلا منه نظاماً دونياً. لقد أخذ التجار الإغريق في معاملاتهم المعقدة كل الأشياء البسيطة التي كان يستخدمها الرياضياتيون الأوائل. واعتبرت هذه مثابرة جادة من الإمبراطورية الرومانية الشرقية حتى نهايتها في عام 1455، ويبدو أنها تبشر بمزايا معينة، إلا أن ثمة ممارسة للنظام الرقمي قد تقنعنا بأنه من الممكن القيام بالعمليات الابتدائية الأربع بسهولة إذا ما تم إتقان معنى الرموز. فالحساب الكسري برموزه التامة هو أيضاً حساب بسيط، ولكن الإغريق لم يكونوا متفقين بسبب عجزهم عن إيجاد نظام متسق: لقد استخدموا كسور الوحدة المصرية، والكسور الستينية البابلية، وأيضاً كسوراً برموز حافلة بالتي عندنا.

لم تستحدث الكسور العشرية قط، ولكن ظهر هذا التطور العظيم فقط في أواخر عصر النهضة الأوروبية بعدما تم استخدام الأدوات الحسابية على نطاق واسع عما كان يستخدم في الماضي. وحتى الكسور العشرية لم يتم القبول بها في الكثير من الكتب الدراسية إلا في القرن التاسع عشر.

كان الجدل قائماً حول مدى صلاحية النظام الهجائي، باعتباره غير مرغوب فيه مع تطور جبر الإغريق، حيث استخدمت حروف لأعداد محددة يمنع استخدامها للإشارة عن الأعداد بصورة عامة، كما هو الحال مع جبرنا. إن غياب الشرح الصوري لجبر الإغريق السابق على ديوفانتس يجب أن يرفض حتى إذا أخذنا بالقيمة العظمى للرمز المناسب. فإذا كان الباحثون الكلاسيكيون مولعون بالجبر، فجدير بهم أن يضعوا رموزاً مناسبة كالتي بدأ بها ديوفانتس. فمشكلة جبر الإغريق أنه لا يمكن شرحه بدراسة أبعد مما هو علية بصورة مستقلة عن الرياضياتيين الإغريق والجبر البابلي على ضوء الإطار العام لعلاقة اليونان بالشرق.

الفصل الرابع

الشرق

بعد سقوط المجتمع اليوناني

أ

لم تختف الحضارة القديمة للشرق الأدنى قط على الرغم من كل تأثيرات الهلنستية. فكلا التأثيرين الشرقي والإغريقي يكشف بكل جلاء عن علوم الإسكندرية. كانت اسطنبول والهند ملتقى خلفية مهمة للشرق والغرب، ففي عام 394 أسس ثيودوسس الأول Theodosius I الإمبراطورية البيزنطية وعاصمتها اسطنبول، وكانت إغريقية، لكنها كانت مركزاً إدارياً للمناطق المترامية الأطراف، حيث كان الإغريق مجرد جزء من سكان متحضر. حاربت هذه الإمبراطورية لآلاف السنين ضد القوى القادمة من الشرق والشمال والغرب، وكانت تعمل في الوقت نفسه حارساً للثقافة الإغريقية وجسراً بين الشرق والغرب. أصبحت بلاد ما بين النهرين مستقلة عن الرومان والإغريق مع بداية القرن الثاني ب.م: مرة تحت حكم البارثيين Parthian، وأخيراً تحت الأسرة الفارسية للدولة الساسانية. كانت مناطق الهند لقرون عدة تحت النفوذ الإغريقي، والذي انتهى مع القرن الأول ب.م، ولكن المملكات الهندية الأم خضعت وأولت علاقتها الثقافية لفارس والغرب.

وهكذا تضاءلت السيطرة السياسية الإغريقية على الشرق الأدنى إلى حد ما مع التطور المفاجئ للإسلام: فبعد السنة الهجرية 622 وصل العرب إلى مناطق واسعة لآسيا الغربية. وقبل نهاية القرن السابع وصل فتحهم إلى المناطق الغربية لإمبراطورية الرومان،

كما هو الحال مع صقلية وشمال أفريقيا وأسبانيا. ورغم دخول الثقافة الإسلامية، استطاع مواطن الحضارات القديمة أن يحافظ على ثقافته: فارس على سبيل المثال ظلت ملتصقة جداً بالدولة القديمة للساسانيين على الرغم من الإدارة العربية. وعلى أي حال استمر الصراع بين التقاليد المختلفة وبدأت تأخذ ثوباً جديداً الآن. وفي عصور الحكم الإسلامي وجدت تقاليد إغريقية محددة محتفظة بقوتها في حضور الثقافات المتوعة.

ح

لقد رأينا أن أكثر النتائج الرياضياتية الرائعة حدثت نتيجة هذا التنافس الممزوج بثقافة الشرق وثقافة الإغريق في أوج الإمبراطورية الرومانية التي ظهرت في مصر. ومع انهيار الإمبراطورية الرومانية بدأت مراكز البحوث الرياضياتية تنتقل إلى الهند، وأخيراً إلى بلاد مابين النهرين. كانت أولى الإسهامات المحتفظ بها والمتعلقة بالعلوم الدقيقة هي المعروفة "سيدهنتاس" Siddhāntās؛ واحدة منها كتب لها البقاء، وهي شبيهة بالنسخة الأصلية، واسمها سوريا Sūrya (300-400 ب.م تقريباً). تناولت هذه الكتب بصورة أساسية علم الفلك والكسور الستينية ودوائر التدوير. تشير هذه الوقائع إلى تأثير علم الفلك الإغريقي الذي ربما انتقل في فترة تأريخ المقاسات. وتشير كذلك إلى اتصالها المباشر بالفلك البابلي. وبالإضافة إلى ذلك توضح السيدهنتاس الكثير من الخصائص التابعة للهند الأم. وتحتوي سوريا سيدهنتاس جداول الجيب (جيا jyā) بدلاً من الأوتار، فالجيب هو نصف الوتر، ومن ثم جزء من المستقيم.

لقد تم شرح وتوسيع نتائج السيدهنتاس بصورة منتظمة من قبل مدارس الرياضياتيين الهنود، وبالتحديد في آوجين Ujjain (وسط الهند)، وميسور Mysore (جنوب الهند). وتم الاحتفاظ بكتب وأسماء أشخاص رياضياتيين هنود مع القرن الخامس ب.م، علماً بأنه توجد ترجمات باللغة الإنجليزية لبعض الكتب.

يعد آرياباتا Aryabhata واحداً من أفضل الرياضياتيين الهنود المعروفين (ويسمى "بالأول" 500 تقريباً)، وبراهماغوبتا Brahmagupta (625 تقريباً). أما السؤال الذي يطرح نفسه هنا إلى أي حد هم مدينون إلى اليونان وبابل والصين، فهذه قضية باتت

للتخمين فحسب؛ ولكن في الوقت نفسه أفصحت أعمالهم عن إبداع منقطع النظير، لأن السمة السائدة في أعمالهم أنها ذات طبيعة حسابية - جبرية. وهي تعبّر عن شغفهم الشديد بالمعادلات غير المحددة ذات الصلة بالمعادلات الديوفانتسية لنسبة إلى ديوفانتس). في القرون اللاحقة أضحت أعمال هؤلاء تابعة لأعمال أخرى في الحقل المعرفي نفسه، فصنِّفَت أعمالهم جزئياً فلكياً وجزئياً حساباً - جبرياً؛ وكانت لهم وجهات نظر في القياسات وحساب المثلثات. توصل آرياباتا الأول إلى قيمة للنسبة التقريبية π تساوي 3.1416. كان الموضوع المفضل لماهافيرا Mahāverā الغزير الإنتاج والتابع لمدرسة ميسور (850 تقريباً) هو إيجاد المثلثات المنطقة (النسبية)، وكذلك المتساوية الأضلاع. ونجد في آوجين عام 1150 رياضياتياً آخر هو بهاسكارا Bhāskara، حيث يعمل براهماغوبتا هناك. وجد أول حل عام للمعادلات غير المحددة من الدرجة الأولى $ax+by=c$ (حيث a و b و c هي أعداد صحيحة) في أعمال براهماغوبتا. إذاً ما يمكن القطع فيه أن من الخطأ أن نطلق على المعادلات الخطية غير المحددة معادلات ديوفانتسية. وفي الوقت الذي يقبل ديوفانتس بالحلول الكسرية، نجد أن الهنود لا يقبلون إلا بالحلول الصحيحة، علماً بأنهم أحرزوا تقدماً ملموساً تجاه تقبلهم إلى الحلول السالبة للمعادلات. والعملية في حد ذاتها قديمة جداً ومعمولاً بها في الفلك البابلي. استطاع بهاسكارا على سبيل المثال حل المعادلة $x^2-45x=250$ عندما $x=50$ و $x=-5$، واعترته الشكوك حول صلاحية الجذور السالبة. ويبقى عمله لقرون عديدة ذا مستوي قياسي في الحساب والقياسات على نطاق الشرق، وترجم إلى الفارسية في عهد الإمبراطور أكبر Akbar (1587)، وأعيدت طباعة الطبعة الإنجليزية لعام 1817 في مدينة كلكتا Calcutta عام 1827[1]. لا تزال الهند القديمة تمدنا

1- صرح براهماغوبتا في ثنايا صفحات كتابه أن بعضاً من مسائله تم اقتراحها "للتسلية فحسب". وهذا يؤكد حقيقة مفادها أن الرياضيات في الشرق تطورت منذ القدم بدافع المنفعة الخالصة وبعد مئة وخمسين عاماً كتب في الغرب ال - كون Al-cuin كتاباً بعنوان:
Problems for the Quickening of the Mind of the Young
معبراً بالمثل عن غرض غير نفعي كما لا يخفى أيضاً أن تقديم الرياضيات على نمط الغاز ساهم في تقدم العلوم، وفتح آفاقاً جديدة ولا تزال هناك بعض الألغاز التي بحاجة إلى تدشين كي تكون ضمن إطار الرياضيات

بالكنوز الرياضياتية: وكما نعلم على سبيل الحصر أن متسلسلة غريغوري - ليبنتز للقيمة $\frac{\pi}{4}$ موجودة في المخطوطة السنسكريتية، والمنسوبة إلى نلاكانثا (قرابة 1500)[1].

3

يعتبر نظامنا الحالي للكسور العشرية هو أفضل إنجاز معروف قدمته رياضيات الهنود، علماً بأن النظام العشري قديم جداً، وكذلك النظام الموضعي/المكاني، ولكن تركيبهما ظهر في الصين ثم في الهند؛ ومع مرور الزمن فرض نفسه على النظم غير الموضعية القديمة. وأول ظهور له في الهند كان على ألواح يعود تاريخها إلى 595، حيث كتب في السنة 346 على صورة قيمة عشرية. كان لدي الهنود هذا السجل المنقوش منذ أمد بعيد لنظام يعبّر عن الأعداد الكبيرة بواسطة كلمات مرتبة تبعاً لطريقة القيمة المكانية. وهناك نصوص سابقة على ذلك، من حيث إن كلمة شونيا sūnya تعني الصفر، وكان استخدامه واضحاً[2].

هناك مخطوطة تسمى باكشلي Bakshāli مكوّنة من سبعين ورقة من لحاء البتولا لشجر القضبان/خشب البتولا] غير معروفة التاريخ والأصل (تقدر بما يتراوح من القرن الثالث إلى القرن الثاني عشر ب.م]. وتحتوي على موضوعات حسب التقليد الهندي عن المعادلات التربيعية وغير المحددات وتقريبات، ونقط تعبّر عن الصفر.

يعود تاريخ إشارة الصفر إلى القرن التاسع. وهي موجودة في أقدم السجلات المنقوشة، ولكن كل هذا بعد وجوده في النصوص البابلية. أما الإشارة 0 لتعبر عن الصفر فربما جاءتنا من تأثير الإغريق (من الكلمة اليونانية أودين ouden والتي تعني

1- C.T.Rajagopal and T.V. Vedaminthi Aiyar, Scripta math, Vol. 17 (1951), pp.65-74; Ibid, Vol. 18 (1952), pp.25-30.
C.T.Rajagopal and T.V. Vedaminthi Aiyar,J.Roy. Asiatic Soc.Bengali, Vol. 15, No.1 (1949), pp. 1-13.

2- يمكن مقارنة هذا باستخدام مفهوم "الفراغ" (kenos كينوس باليونانية) في كتاب ارسطو "الطبيعة" Physica IV.8.215b وانظر ايضاً:
C.B. Boyer, 'Zero: the symbol, the Concept, Number," Nat.Math. Mag.. Vol. 18(1944) pp.323-30

لا شيء)؛ بينما تظهر النقطة عند البابليين بين الأرقام، ولكن الصفر الهندي في نهايتها. وهكذا فإن 0، 1، 2،...9 أصبحت مرادفة للأرقام[1].

بدأ نظام القيمة المكانية العشرية في التغلغل ببطء. وربما تعود جذوره إلى الصين مع طرق القوافل إلى الأطراف المتنامية الأخرى من الشرق الأدنى، فارضاً وجوده بجانب النظم الأخرى. أما بالنسبة لهذا التغلغل في فارس، ومن ثم في مصر فربما، حدث أثناء العهد الساساني (224-641) إبان التواصل بين مصر وفارس والهند، ولا تزال ذكرى نظام القيمة المكانية تنبض في بلاد ما بين النهرين في تلك الحقبة. وجد أقدم مصدر محدد يتعلق بنظام الهنود للقيمة المكانية خارج الهند في أعمال الأسقف السوري سيفيروس سيبوخت Severus Sēbōkht عام 662.

بدا العالم الإسلامي العلمي متهيئاً للنظام الهندي مع ترجمة الفزاري للسيدهنتاس إلى العربية (773 تقريباً). واستخدم على نطاق واسع في العالم العربي وما بعد على الرغم من استمرارية نظام الترقيم الإغريقي في التداول، بالإضافة إلى النظم المحلية الأخرى. ربما أدت العوامل الاجتماعية دورها في ذلك، إذ يفضل التقليد الشرقي أسلوب قيمة المكانة العشرية على الأسلوب الإغريقي. وتوضح الرموز المستخدمة في التعبير عن أرقام القيمة المكانية اختلافات شاسعة، ولكن هناك نمطان أساسيان يجب ذكرهما:

الرموز الهندية المستخدمة من قبل عرب المشرق؛ والأعداد التي تسمى"الغبارية"، التي استخدمت في أسبانيا عن طريق عرب المغرب. ولا تزال الرموز الأولى قائمة في العالم العربي، ولكن يبدو أن نظامنا العددي مشتق من النظام الغباري. تقترح نظرية فوبيك Woepcke أن الأعداد الغبارية كانت تستخدم في أسبانيا عندما وصل العرب إليها، ولكنها وصلت إلى الغرب عن طريق الفيثاغوريين المجددين التابعين إلى الإسكندرية مع بداية العام 450 ب.م[2].

1- قارن H. Freudental, 5000 jarren internationale wetenschap (Groningen, 1946).

2- قارن S.Gandz, "The Origin of the Ghubar Numerals" Isis, Vol. 16 (1931) pp. 393-424.

وهناك نظرية لبوبنوف N.Bubnov التي تزعم أن الأشكال الغبارية تم اشتقاقها من الرموز الإغريقية - الرومانية القديمة التي تستخدم على المعداد abacus. انظر أيضاً الحاشية:

F.Cajori, History of Mathematics (New York, 1938),p.90 , D.E.Smith and L.C.Karpinski, The Hindu-Arabic Numerals (Boston, 1911), p.71.

٤

أصبحت بلاد ما بين النهرين في ظل الهيمنة الرومانية والهلنستية قاعدة عسكرية للإمبراطورية الرومانية، ولكن عندما اجتاح الساسانيون مناطقها الوسطى على مدى طرق القوافل خضعت لسيطرتهم واعتبروها موطناً لملوك فارس تحت سلطة سيروز Cyrus و زيركس Xerxes. لم يعرف إلا النزر اليسير عن هذه الحقبة من التاريخ الفارسي، ولا سيما علومها، ولكن التاريخ الأسطوري (كما هو منطبع عند عمر الخيام والفردوسي وغيرهم) يؤكد أن السجل التاريخي للعصر الساساني يتمتع بفترة ثقافية رائعة. تعد فارس الساسانية ملتقى حضارات من حيث موقعها الواصل بين اسطنبول والإسكندرية والهند والصين. وهكذا تلاشت بابل، ولكنها استبدلت بسلوقيا - كتيسفون Seleucia-Ktesiphon، والتي أصبحت بغداد بعد دخول العرب إليها عام 641. ترك الفتح العربي الكثير من معالم فارس القديمة دون أن يمس؛ واستبدلت اللغة البهلوية/الفهلوية باللغة العربية باعتبارها لغة رسمية.

توضح رياضيات العصر الإسلامي المزيج نفسه من التأثيرات التي ألفناها في الإسكندرية والهند[1]، حيث ساهم خلفاء الدولة العباسية في تقدم الرياضيات والفلك، وأبرزهم: المنصور (754-775)، وهارون الرشيد (766-809)، والمأمون (813-833)، حيث قام المأمون بتأسيس "بيت الحكمة" في بغداد مزوداً بمرصد فلكي ومكتبة. وهكذا بدأت النشاطات الإسلامية في حقل العلوم الدقيقة مع ترجمة الفزاري للسيدهنتاس. ووصلت ذروتها وازدهارها مع قدوم مواطن من خيفا Khiva هو محمد بن موسى الخوارزمي في عام 825. كتب محمد كتب كثيرة في الرياضيات والفلك، وقام بشرح حسابه بنظام الترقيم الهندي. وعلى الرغم من ضياع النسخة العربية الأصلية، إلا أن الترجمة اللاتينية للقرن الثاني عشر ظلت على قيد الحياة.

1- كانت الرياضيات الشرقية للقرون الوسطى عاجزة لزمن طويل بسبب ندرة المصادر المتاحة للترجمة. وتحسن الوضع تدريجياً رغم وجود بعض الإسهامات المهمة باللغة الروسية فقط.

يعتبر هذا الكتاب إحدى الوسائل التي بواسطتها تعرّفت أوروبا الغربية على النظام العشري الموضعي. تحمل الترجمة العنوان Algorithmi de numero Indorum [خوارزمية الأعداد الهندية]، وأضيفت مفردة algorithmus (اسم المؤلف باللاتيني) إلى لغتنا الرياضياتية. وحدث شيء مشابه لجبر محمد أخذ العنوان "حساب الجبر والمقابلة" (وحرفيا هو "علم الاختزال والمقارنة (الموازنة)"، مما يعني "علم المعادلات"). غدا هذا الجبر معروفاً في الغرب على الرغم من بقاء النص العربي عن طريق الترجمات اللاتينية. وجعلوا من كلمة "الجبر al-jabr" مرادفة لكل علوم الجبر "algebra"؛ وهو بالفعل حتى منتصف القرن التاسع عشر ليس إلا علماً للمعادلات.

يضم كتاب "الجبر" في طياته دروساً في المعادلات الخطية والتربيعية في غياب الصورية الجبرية. وحتى رمزية ديوفانتس "البلاغية" كانت غير حاضرة. ومن بين هذه المعادلات أنماط ثلاثة تم وصفها بالآتي: $x^2 + 10x = 39, x^2 + 21 = 10x, 3x + 4 = x^2$ وقد تم التطرق إليها بصورة مستقلة طالما يسمح بالعوامل الموجبة فقط. ظهرت هذه الأنواع الثلاثة بصورة مكررة في النصوص اللاحقة "وهكذا غدت المعادلة $x^2 + 10x = 39$ كأنها خيط من ذهب عبر الجبر لقرون عديدة"، على حد تعبير الأستاذ كاربنسكي L.C.Karpinski[1]. ولكن هناك الكثير من التفكير الهندسي.

تنسب جداول محمد الفلكية وجداوله لحساب المثلثات (الجيوب والظل) إلى الأعمال العربية. وقد ترجمت فيما بعد إلى اللاتينية. وما هندسته إلا دليلاً مبسطاً لقواعد القياسات. وهي ذات أهمية لكونها أيضاً تعود بصورة مباشرة إلى نصوص أحبار اليهود للعام 150 ب.م. وتوضح هذه الجداول عيباً محدداً تجاه التعاطف مع التقليد الإقليدي، فعلم الفلك عند الخوارزمي هو مجرد خلاصة للسدهانتاس؛ ومن ثم يبيّن إلى حد ما بصورة غير مباشرة التأثير اليوناني من خلال النص السنسكريتي، فأعمال الخوارزمي جميعها ذات سمة شرقية وليست ذات تأثير يوناني[2]. وربما درست هذه بتأنٍ، ولذا أدت هذه السمة دوراً مهماً في تاريخ

1- L.C. Karpinski, Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khwarizmi (New York, 1915), p.19.
2- S.Gandz, " The Sources of Al-Khwarizmi'Algebra" Osiris, Vol. I (1936), pp.263-77.

الرياضيات، لكونها واحدة من المصادر الرئيسة التي جاء عن طريقها الترقيم الهندي والجبر العربي إلى أوروبا الغربية. كان الجبر حتى منتصف القرن التاسع عشر يفصح عن أصالة شرقية، ولكن ينقصه الأساس البدهي. ومن هذا المنطلق فهو يناقض بشده الهندسة الإقليدية، علماً أن الجبر والهندسة لا تزالان حتى يومنا هذا تحتفظان بهذه الدلائل رغم جذورها المختلفة.

5

لقد قطفت مدرسة الباحثين العرب[1] ثمار الإرث اليوناني الذين ترجموا بإخلاص وتفانٍ أدبيات الإغريق إلى اللغة العربية: أبولينوس وأرخميدس وإقليدس وبطليموس وغيرهم. ويبين القبول العام "للمقاسات (المجسطي)" لبطليموس ومجموعته الرائعة تأثير الترجمة العربية في العالم الغربي. وهكذا حافظت هذه النسخ والترجمات على الكثير من أدبيات الإغريق الكلاسيكية، وإلا كان مصيرها الضياع. هناك نزعة طبيعية تؤكد الجانب الحسابي والعملي لرياضيات اليونان على حساب الجانب النظري. لقد كان علم الفلك العربي مهتماً بحساب المثلثات: فكلمة سينوس sinus [الجيب] هي ترجمة لاتينية باللفظ العربي للمفردة السنسكريتية جيا jyā. فالجيب يقابل نصف الوتر لضعف القوس (استخدم بطليموس كامل الوتر chord). وتم تصوره باعتباره خطوطاً وليس أعداداً، لذا نجد معالجة جيدة لحساب المثلثات في أعمال البتاني (850-929 تقريباً) وهو واحد من أعظم فلكيي العرب. وكانت له جداول لظل التمام cotangent لكل درجة (umbra extensa)، وكذلك قاعدة الجيب لحساب المثلثات الكروي.

1- عندما نقول "الباحثين العرب" أو "العلوم العربية" فإننا لا نقصد بذلك ان الإرث اليوناني تم قطف ثماره من قبل العرب وحدهم، لأن الكثير من الباحثين العرب هم فرس وطاجيك ومصريون ويهود وغيرهم وبالأسلوب نفسه يمكن أن يقال عن الباحثين الأوروبيين من بوتيوس Boetius حتى غاوس Gauss انهم "باحثون لاتينيون" لأنهم كتبوا باللغة اللاتينية فالعربية كانت اللغة الرسمية آنذاك للعالم الإسلامي lingua franca كما كانت اللاتينية للعالم الغربي، واليونانية للعالم الشرقي المسيحي

توضح أعمال البتاني أن الكتاب العرب لم ينسخوا أعمال من سبقهم فحسب، بل قدموا إسهامات بنتائج جديدة، وذلك بإتقانهم الأساليب اليونانية والشرقية. لقد اشتق أبو الوفاء (البوزجاني 940-997/8) مبرهنة الجيب لحساب المثلثات الكروي، وأعد جداول للجيب حتى الدقيقة 15، والتي تصل قيمتها إلى ثمان منازل عشرية؛ كما أدخل مرادفات جيب التمام secant وجتا التمام cosecant، وتلاعب بالإنشاءات الهندسية مستخدماً فرجاراً ذا فتحة مثبتة. واصل البوزجاني في دراسات الإغريق عن المعادلات التكعيبية والرباعية. كتب الكرخي (1029 تقريباً) جبراً مفصلاً، مقتدياً بديوفانتس، ولديه موضوعات مشوقة عن الجذور الصماء كالصيغ $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$ و $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}$. كما أشار إلى نزعة محددة نحو الإغريق. و "كان إهماله للرياضيات الهندية حدث بصورة منتظمة"[1].

6

يجب ألا نأخذ بالكثير من التغيرات الإثنولوجية [علم الأعراق البشرية] والسياسية في العالم الإسلامي، فهي غالباً ما تفرز صعوداً وهبوطاً في قطف ثمار علم الفلك والرياضيات، فثمة مراكز بحثية اندثرت، وأخرى ازدهرت لمدة، ولكن السمة العامة للعلم الإسلامي ظلت ثابتة، وسوف نذكر القليل من الخطوط العريضة:

نحو 1000 ق.م ظهر حكام جدد في المناطق الشمالية لفارس، وهم الأتراك السلاجقة الذين ازدهرت إمبراطوريتهم حول مركز الري المعروف ميرف Merv. وهناك عاش عمر الخيام (1038/48-1123/24) المعروف في الغرب بمؤلف الرباعيات (طبعة فيتزغيرلد Fitz Gerald لعام 1859)، كما عرف بأنه فيلسوف وفلكي، وإليكم ما يقول من أبيات:

آه هكذا يقول الناس عن حساباتي

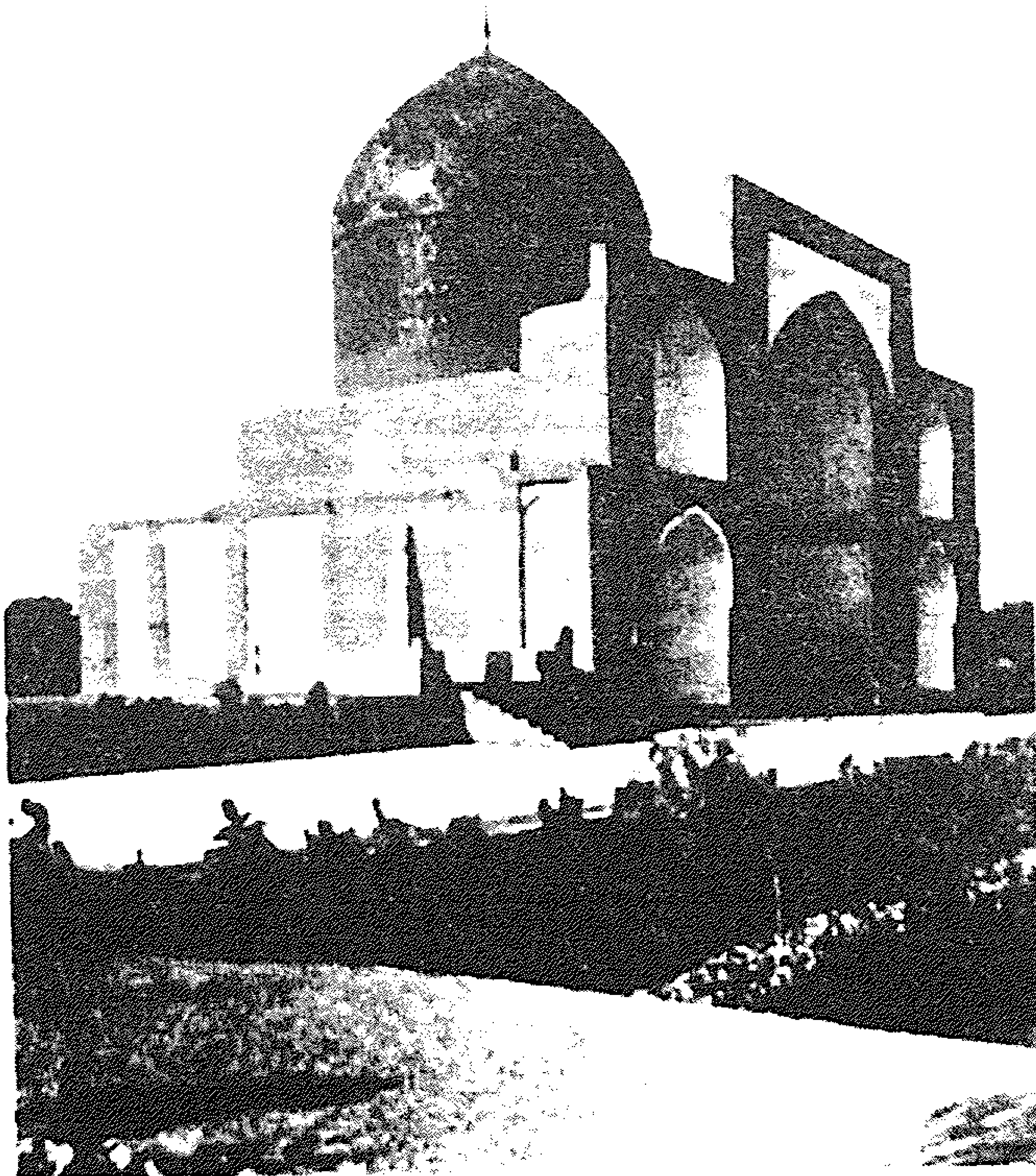
1- G.Sarton, Introduction to the History of Science (Baltimore, 1927), Vol. I,p.719.

تم تربيع السنة لمحيط الإنسان، أيه
وإذا كان الأمر كذلك لنأخذ من التقويم
غير مولود بالغد ولقي حتفه بالأمس

وهنا يستند الخيام إلى التقويم الفارسي القديم الذي تأسس بمقدار خطأ يوم واحد لكل 5000 سنة (1540 أو 3770 تبعاً لتفسيرات مختلفة)، بينما نجد في تقويمنا الغريغوري خطأ يوم واحد لكل 3330 سنة. أدخل تعديله في عام 1070، ولكن استبدل فيما بعد بالتقويم القمري الإسلامي. كتب الخيام عمله "الجبر" الذي يعد إنجازاً رائعاً من حيث المحتوى، فهو يتناول دراسات عن المعادلات التكعيبية بصورة منتظمة. استطاع أن يحدد جذور هذه المعادلات باعتبارها تقاطعاً لقطاعين مخروطين اثنين، وذلك بتوظيفه لأسلوب غالباً ما كان يستخدم عند الإغريق. ولم تكن لديه حلول عددية ولا مميزة (بالأسلوب اليوناني أيضاً). وبين الحلول "الهندسية" والحلول "الحسابية"، فإن الأخيرة تكون قائمة فقط إذا كانت الجذور أعداداً نسبية موجبة.

يختلف هذا المنحى تماماً عن رياضياتيي القرن السادس عشر البولونيين، الذين كانوا يستخدمون أساليب جبرية بحتة.

ويتناول عمر في كتاب آخر الصعوبات الموجودة في كتاب إقليدس، حيث استبدل بدهية المتوازيات بمجموعة أخرى من القضايا (الفرضيات)، وهنا توصل



ضريح عمر الخيام

إلى أشكال (مؤشرات) مرتبطة الآن بما يسمى "فرضيات الزاوية الحادة والمنفرجة والقائمة"، والتي نجد مكانتها في الهندسة اللاإقليدية. كما استبدل نظرية لإقليدس متعلقة بالفرضيات بنظرية عددية، إذ توصل إلى نظرية عن الأعداد الصماء (غير المنطقة)، ومفهوم العدد الحقيقي بوجه عام[1].

وبعدما سحق المغول بغداد في عام 1256، انطلق مركز تعليمي جديد بالقرب من مرصد مراغه Maragha؛ شيّده الحاكم المغولي هولاكو لنصر الدين الطوسي (1201-1274). وهنا تبرز مرة أخرى مؤسسة تجمع علوم الشرق مع علوم الإغريق، وتقارن بينها. ويفصل نصر الدين حساب المثلثات عن علم الفلك باعتباره علماً خاصاً. وكانت له محاولات تتعلق "بالبرهنة" على بدهية المتوازيات لإقليدس، سالكاً أسلوب الخيام الذي يفصح عن تقدير المنحى النظري عند الإغريق. لقد كان تأثير نصر الدين ملموساً على نطاق واسع فيما بعد في النهضة الأوروبية. ومع نهاية العام استخدم جون والس أعمال نصر الدين المتعلقة بمسلمة إقليدس. وهكذا واصل نصر الدين في إرث الخيام عن نظريته عن النسب والاتجاه العددي الجديد للأعداد الصماء.

جمشيد الكاشي (توفي 1436 تقريباً) رياضياتي فارسي آخر يدلي تنوعاً رائعاً في الأعمال العددية إذا ما قورن بتلك التي توصل إليها الأوروبيون مع نهاية القرن السادس عشر. قام بحل المعادلات التكعيبية بالأسلوب التكراري وبأساليب حساب المثلثات. وكان على علم بالطريقة المعروفة الآن بطريقة هورنر Horner لحل المعادلات الجبرية للرتب العليا أو الأعداد الاعتيادية؛ الطريقة التي كما تبدو نتيجة التأثير الصيني. نجد في أعمال الكاشي صيغة ذات الحدين لأس العدد الصحيح الموجب؛ أما بالنسبة للكسور الستينية فقد استخدم بكل بساطة الكسور العشرية (مثلاً: حاصل ضرب 14.3 و 25.07 يساوي 357.501). وكذلك أوجد قيمة للنسبة التقريبية π حتى 16 منزلة، مما يشير إلى التغلغل العميق لرياضيات الصين في العالم الإسلامي أثناء حكم سلالة سونج Sung.

كان ابن الهيثم (الحسن ابن الهيثم 965-1039 تقريباً) واحداً من أهم الشخصيات العلمية في مصر، وأعظم فيزيائي مسلم. تعد أعماله في "الضوء" ذات

1- D.J.Struik, "Omar Khyyam, Mathematician", The Mathematics Teacher, Vol. 51 (1958), pp. 280-85.

تأثير قوي في الغرب. استطاع أن يحل "مسألة الحسن"؛ والمطلوب: من نقطتين على مستوٍ رسم دائرة تلتقي عند نقطة في المحيط، ومن ثم تكون الزاويتان متساويتين مع القائم عند تلك النقطة.

قادت هذه المسألة إلى معادلة رباعية تم حلها بالطريقة اليونانية، أي بتقابل القطع الزائد بدائرة. استخدم الحسن "طريقة الاستنفاد" لحساب حجوم الأشكال الناتجة عن دوران القطع المكافئ حول أي قطر أو إحداثي. والجدير بالذكر أن أبو كامل الذي كان يعيش في مصر قبل الحسن بمئة عام، والمتخصص في الجبر، والذي تابع ووسع أعمال الخوارزمي، لم يكن له تأثير في الكرخي فحسب، بل كذلك أثر في ليوناردو Leonardo من مواطني بيزا Pisa.

يوجد مركز تعليمي آخر في أسبانيا. ويعد الزركلي (1029-1087 تقريباً) واحداً من أهم الفلكيين المتواجدين في قرطبة، وأفضل مشاهد في عصره ومحرر ما يسمى جداول تولدان Toledan للكواكب السيارة. وكان لجداول حساب مثلثات هذا العمل الذي ترجم إلى اللاتينية أثر فاعل في تطور حساب المثلثات في عصر النهضة. وتبعت جداول تولدان جداول ألفونسين Alfonsine (تيمناً بألفونسو العاشر AlfonsoX في القرن الثالث عشر من كاستايل Castile)، والتي كانت لقرون ذات سلطة ونفوذ.

٦

أما بالنسبة إلى الرياضيات الصينية فإن من الخطأ اعتبارها ظاهرة معزولة بل هي شبيهة برياضيات المايا. وجد في عصر هان Han السحيق (معاصر للإمبراطورية الرومانية) علاقات ثقافية وتجارية ملحوظة في مناطق أخرى من آسيا وحتى في أوروبا، وكما كان تأثير العلوم الهندية والعلوم العربية على الصين فإن العلم الصيني هو الآخر ترك بصماته على علوم البلدان الأخرى.

لنأخذ على سبيل المثال، نظام الموضع العشري والأعداد السالبة والتي جدت طريقها من الصين إلى الهند، فالتأثير الهندي على الصين قديم جداً مع قدوم البوذية

إلى الصين (القرن الأول ب.م)، وعلى أي حال هناك النزر اليسير بل لا يوجد أي تأثير يوناني على الإطلاق على الرغم من التطورات المتوازية.

إن الدراسات عن نسبة المحيط وقطر الدائرة، والتي كانت على نحو نموذجي في الحقبة التي تلت عصر هان، حدثت كما يبدو بصورة مستقلة عن أرخميدس. يعد ليو هوي Liu Hui مؤلفاً للشروح الباقية من الفصول التسعة Nine Chapters (263 ب.م)؛ وجد عن طريق المضلعات المنتظمة المحاطة والمطوقة أن $3.1401 < \pi < 3.1427$. وبعد قرنين نجد تسو جونك شيه Tsu Chung-Chih (430-501) وابنه توصلا إلى قيمة π، ليس لسبع منازل، بل القيم: $\pi = \frac{22}{7}$ و $\pi = \frac{355}{113}$[1].

جمعت نصوص لأهم الكتب الرياضياتية أثناء سلالة تانج Tang (618-906)، وذلك لأغراض رسمية تابعة لامتحانات الإمبراطورية، وهي الحقبة التي بدأت فيها الطباعة. ويعود تاريخ طباعة الكتب الرياضياتية الأولى حسب علمنا إلى عام 1084 وما بعد. وفي عام 1115 ظهرت أولى طبعات "الفصول التسعة".

نجد معادلة تكعيبية أكثر تعقيداً من النمط $x^3 = a$ الموجود في "الفصول التسعة" في كتاب يعود تاريخه إلى 625 تقريباً من تأليف وانج هسيو تونج Wang Hsiao Tung. ولكن يعتبر عصر سلالة سونج Sung (960-1279) من أكثر العصور ازدهاراً للرياضيات الصينية، وكذلك السنوات الأولى لسلالة المغول لمقاطعة يوان Yuan (خان الأكبر يتمتع بشهرة كشهرة ماركو بولو). ونجد من بين الأعلام البارزين جين جيو - شوا Chin Chiu-Shao، الذي يعود تاريخ صدور كتابه إلى عام 1247، حيث طوّر نظرية المعادلات غير المحددة، وهي النظرية التي تطورت تدريجياً على مر العصور، ويمكن كتابة أحد الأمثلة على الشكل الآتي:

1- ويمكن الحصول على $\pi = \frac{335}{113}$ من القيمة التي توصل إليها بطليموس و أرخميدس وهي: $\frac{377-22}{120-7} = \frac{335}{113}$. تظهر هذه القيمة باعتبارها كسراً جزنياً يمكن كتابته بكسور عشرية، ويمتد على صورة كسر مستمر. وأحياناً ينسب إلى "قيمة ميتوس" Value of Metius المنسوب إلى عمدة المدينة ادرين انثونزون (1580) Adriaen Anthoniszoon وأبناؤه هم الذين اطلقوا على انفسهم ميتوس.

$$x \equiv 32 (\bmod 83) \equiv 70 (\bmod 110) \equiv 30 (\bmod 135)$$

تناول جين أيضاً الحلول العددية لمعادلات الدرجة الأعلى، والتي تأخذ الصورة:

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$$

واستطاع حل هذه المعادلات بواسطة تعميم طريقة التقريبات المتتابعة، والتي سبق أن استخدمت في "الفصول التسعة" لاستخراج الجذور التربيعية والتكعيبية. ونتعرف على هذه الطريقة من العمليات نفسها المتداولة في كتبنا الدراسية بعد صدور كتاب هورنر W.G.Horner في عام 1819. ودون دراية منه تناول طريقة نموذجية كانت تستخدم في الرياضيات الصينية قبل ألف عام.

يانغ هوي Yang Hui رياضياتي آخر لعصر سونج اشتغل بالكسور العشرية، وكتبها بالطريقة التي تذكرنا بأساليبنا الحالية (كتاب 1261). وتتوصل إحدى مسائله إلى 24.68×36.56=902.3108، كما يقدم لنا يانغ المزاعم الباكرة والباقية لمثلث باسكال، والذي نحصل عليه أيضاً في كتاب جو - شيه جيه Chu-Shih-Chieh لعام 1303 تقريباً. ويعتبر جو - شيه واحداً من أهم رياضياتيي هذه المجموعة، حيث تقدم مؤلفاته إنجازات الطريقة الصينية الحسابية - الجبرية القائمة على الحسابات. وهو الذي وسّع حلول "المصفوفة" لمنظومة المعادلات الجبرية الخطية إلى معادلات من الدرجة الأعلى بعدة مجاهيل، وبأسلوب يذكرنا بأسلوب سيلفستر Sylvester في القرن التاسع عشر.

استمر النشاط الرياضياتي في العصر اللاحق لسونج، ولكن لم يتوصل أحد إلى أي نتائج جديدة على مستوى عالٍ. وعموماً يمكن القول إن قدرة الصينيين في الأعمال الحسابية والجبرية المعقدة لا تقارن بقدرة زملائهم الهنود فحسب، بل حتى بقدرة أولئك الذين كتبوا بالعربية، ومع ذلك يمكن اعتبارهم من حين إلى آخر أساتذة لهم. وعلى سبيل المثال: فطريقة هورنر والاشتغال بالكسور العشرية يمكن إيجادها في كتاب الكاشي السمرقندي[1].

1- كانت الرياضيات الصينية واليابانية على اتصال مع أوروبا في القرنين السادس عشر والسابع عشر، حيث أدخل الأب ماتيو ريجي Matteo Ricci الرياضيات والفلك الغربيين عندما كان الأب يقيم في بكين في الفترة من 1583 حتى وفاته 1610. انظر:

H.Bosmans, "L'oeuvre scientifique de Mathieu Ricci, S.J," Revue des Questions Scient., 3rd ser., Vol. 29 (Jan. 1921), pp.135-51.

الفصل الخامس

البدايات

في أوروبا الغربية

أ

كان الشرق هو دائماً القسم الأكبر والمتقدم للإمبراطورية الرومانية من وجهتي النظر الاقتصادية والثقافية، فالشطر الغربي لم يكن قائماً على اقتصاد الري حيث كانت الزراعة ممتدة الأرجاء ومن ثم لم تثر دراسة علم الفلك. كان الغرب في الواقع مكتفياً ومدبراً أموره بالقدر الضئيل من علوم الفلك وبعض الحسابات العملية والقياسات المتعلقة بأمور التجارة ومساحة الأراضي، ولكن الدافع من وراء تقدم هذه العلوم هو الشرق، عندما كان الشرق والغرب منفصلين سياسياً كان هذا الدافع خافتاً تماماً.

استمر استقرار حضارة الإمبراطورية الغربية لقرون عدة دون اضطراب أو تغيير، وظلت وحدة حوض البحر المتوسط مع الحضارات القديمة ثابتةً أيضاً - ولم تكن متأثرة حتى بالغزوات البربرية - وبقيت الأوضاع الاقتصادية والمؤسسات الاجتماعية والحياة الثقافية في جميع الملكات الجرمانية عدا بالطبع الجزر البريطانية كما كانت عليه أيام انهيار الإمبراطورية الرومانية. كانت الزراعة تشكل أساس الحياة الاقتصادية، واستبدل الرق تدريجياً ليحل مكانه المزارع المستأجر الحر، أضف إلى ذلك المدن المزدهرة والتجارة المتعاظمة على نطاق واسع مع الاقتصاد والمال.

كانت السلطة المركزية في العالم الإغريقي - الروماني بعد سقوط الإمبراطورية الغربية في عام 476 منقسمة بين الأباطرة في القسطنطينية و الباباوات في روما. استمرت كنيسة الغرب الكاثوليكية عبر مؤسساتها ولغتها بالقدر الذي تستطيع فيه الثقافة التقليدية للإمبراطورية الرومانية البقاء بين الملكات الجرمانية؛ ترك أصحاب الثقافة العلمانيون والمتدينون قدراً بحيث يأخذ مجراه من حضارة الإغريق - الرومان.

أحد هؤلاء الأفراد العلمانيين الدبلوماسي والفيلسوف أنسيوس مانلوس سيفرنيوس بوتيوس Anicius Manlius Severinus Boetius الذي ألف كتباً في الرياضيات واعتبر كتاباً رسمياً في العالم الغربي لأكثر من ألف عام. تعكس هذه الكتب الدراسية الأوضاع الثقافية رغم بؤس محتواها وما تبقى منه كان له تأثير دون شك، ويعتقد أن المؤلف لقي حتفه في عام 524 ووضع في قائمة شهداء الاعتقاد الكاثوليكي. يزودنا كتابه الموسوم Institutio arithmetica [أسس الحساب] قدراً من نظرية الأعداد الفيثاغورية التي كانت متشرية في المنهج التعليمي للقرون الوسطى باعتباره جزءاً من الثلاثية القديمة[1] والرباعية: الحساب والهندسة والفلك والموسيقا والكتاب في حد ذاته ترجمة سطحية قام بها نيكوماخوس Nicomachus.

من الصعب تحديد الفترة التي انهار فيها اقتصاد الإمبراطورية الرومانية في الغرب، كي تفسح المجال لنظام اقتصادي جديد. وربما تسلط فرضية برينيه H.Pirenne[2] بعض الضوء على هذه المسألة. تقترح هذه الفرضية أن نهاية العالم الغربي القديم جاء مع المد الإسلامي، حيث استطاع العرب كبح جماح نفوذ الإمبراطورية البيزنطية من جميع أقاليمها الشرقية والجنوبية لسواحل البحر الأبيض المتوسط وجعلوا الجانب الشرقي بحيرة إسلامية مغلقة. ومن هنا أقاموا العلاقات التجارية بين الشرق الأدنى ونصف الكرة الغربي المسيحي وبلدان عدة؛ وكانت المعابر الثقافية بين العالم العربي والمناطق الشمالية للإمبراطورية الرومانية السابقة، لم تكن إطلاقاً مقفلة بل كانت محجوبة لقرون.

1- الثلاثية هي النحو والبلاغة والمنطق، وايضاً تعني الجزء التمهيدي من الفنون الحرة السبعة في مدارس العصور الوسطى - المترجم.

2- H. Pirenne, Mahomet et Charlemagne (Paris, 1937; English translation, New York, 1939). & A.F.Havighurst, The pirenne Thesis (Boston, 1958).

لقد انحسر الاقتصاد على نطاق واسع في مناطق الإفرنج السلتية وأجزاء أخرى من الإمبراطورية الرومانية، أخذت المدن في التدهور وأصبحت عوائد الضرائب شحيحة واستبدل الاقتصاد المالي بالتسويق المحلي والمقايضة، بإيجاز تقلصت أوروبا الغربية إلى دولة شبه بربرية، ونهض المالك الأرستقراطي مع انهيار التجارة التي ترأسها الكارولينجيون Carolingians ملاك الإفرنج الشماليون، وغدت السلطة الحاكمة في أرض الإفرنج، وانتقل المركز الثقافي والاقتصادي إلى بريطانيا والجزء الشمالي من فرنسا، ونتيجة انفصال الشرق عن الغرب انحصر تأثير سلطة البابا إلى حد يجمع البابوية وَالكارولينجي في حلف واحد، وتمخض عن هذا التحول تتويج شارلمن Charlemagne إمبراطوراً لإمبراطورية روما المقدسة وأصبح المجتمع الغربي إقطاعياً و إكليركياً [كنسياً] باسطاً نفوذه صوب المناطق الجرمانية والشمالية.

2

هناك تقدير طفيف لرياضيات القرون المبكرة للإقطاعية الغربية حتى في الأديرة، أما من ناحية المجتمع الزراعي البدائي لهذه الفترة فكانت العوامل التي تحفز الرياضيات ذات الطبيعة العملية المباشرة غائبة تماماً، وأما الرياضيات الرهبانية فلم تكن سوى بعض الحسابات الكنسية التي تستخدم أساساً لحساب أوقات عيد الفصح (المسماة computus).

كان بوتيوس هو المرجع الأعلى وصاحب النفوذ. ويعتبر ألكن Alcuin البريطاني المولد واحداً من أهم الرياضياتيين الكنسيين المرتبط بقضاء شارلمن وصاحب كتاب Problems for the Quickening of the Mind of the Young الذي يحتوي على مجموعة مختارة من المسائل التي كان لها تأثير في المناهج الدراسية لقرون عديدة.

يعود تاريخ هذه المسائل إلى الشرق القديم، فعلى سبيل المثال:

يحاول كلب تعقب أرنب على بعد 150 قدماً، فعندما يقفز الكلب 9 قفزات، يقفز الأرنب 7 قفزات، فكم عدد الوثبات التي عن طريقها يستطيع الكلب تجاوز الأرنب؟

يراد نقل ذئب وماعز وملفوف (كرنب) في قارب عبر النهر بحيث يتم نقل واحد منهم فقط برفقة رجل القارب، كيف يمكن أن تقلهم إلى الضفة الأخرى بحيث لا يأكل الماعز الملفوف ولا الذئب يأكل الماعز؟

غيربير Gerbert راهب فرنسي ورياضياتي كنسي آخر. تبوأ في عام 999 شرف البابوية تحت مسمى سيلفستر الثاني Sylvester II وكتب أطروحاته تحت تأثير بوتيوس Boetius، وتكمن أهميته الأساسية باعتباره رياضياتياً وأنه أول باحث غربي يغادر إلى أسبانيا ويقوم بدراسات تتعلق برياضيات العالم العربي.

3

ثمة فروق ذات دلالة بين التطور الغربي واليوناني المبكر والإقطاعية الشرقية، ولكن الصفة الشاملة للزراعة الغربية خلقت نظاماً واسعاً من الإداريين البيروقراطيين غير الضروريين، لذا ليس بإمكانها أن تدعم أسس الحكم المطلق الشرقي، ومن ثم لا يمكن الحصول في الغرب على إمداد واسع من العبيد. وعندما تطوّرت القرى في أوروبا الغربية إلى مدن تطورت هي الأخرى إلى وحدات ذات حكم - ذاتي من حيث ليس باستطاعة المواطنين القيام بحياة مترفة قائمة على استعباد الرق.

يعتبر هذا أحد الأسباب الرئيسة الذي لم يسمح للدولة المدنية اليونانية بالتطور والمدن الغربية والتي كان لها الكثير من الأشياء المشتركة أثناء مراحلها الأولى مما زاد من قوة انحرافها في الفترات الأخيرة. كان على أهل المدن في القرون الوسطى شحذ عبقرياتهم الخلاقة لتحسين أوضاعهم المعيشية. وكان القتال بمثابة صراع مرير ضد الملاك الإقطاعيين - بالإضافة إلى النزعات المدنية - ومع ذلك تحققت انتصارات في القرون الثاني عشر والثالث عشر والرابع عشر، ولم يقم هذا النصر على التوسع السريع للتجارة والاقتصاد المالي فحسب، بل على نحو تدريجي في تطوير التكنولوجيا. غالباً ما يدعم أمراء الإقطاع المدن من أجل صراعاتهم ضد

الملاك الصغار، وأخيراً يبسطون حكمهم على المدن، وأدى هذا في النهاية إلى ظهور أولى الدول الوطنية في أوروبا الغربية.

بدأت المدن تأسس علاقاتها التجارية مع الشرق الذي كان لا يزال مركز الحضارة، وتقوم هذه العلاقات على أساس الأسلوب السلمي حيناً وفي حين آخر تقوم على أسلوب العنف كما هو شائع في أكثر الحملات الصليبية[1]. كانت المدن الإيطالية أول من أسس علاقات تجارية وتبعتها المدن الفرنسية وأوروبا الوسطى. كان الباحثون أحياناً يتبعون أو يتقدمون على الجنود والتجار. أسبانيا وصقليه أقرب المناطق للاتصال بين الشرق والغرب ومن هنا تعرّف التجار والطلاب الغربيون على الثقافة الإسلامية.

عندما أخذ المسيحيون توليدو Toledo من المغاربة في عام 1085 توجه الطلاب الغربيون بشكل جماعي إلى هذه المدينة لتعلم العلوم كما نقلت بالعربية، وأحياناً كانوا يوظفون مترجمين يهوداً لهدف ترجمة هذه الآثار، ولذا نجد في أسبانيا في القرن الثاني عشر أفلاطون تفولي Tivoli وَغيراردو كريمونا Gherardo of Cremona وَأدلارد باث Adelard of Bath وَروبرت شستير Robert of Chester يقومون بترجمة المخطوطات الرياضياتية العربية إلى اللاتينية. وهكذا أصبحت أوروبا متأقلمة مع الكلاسيكيات اليونانية عن طريق العربية، ومع مرور الوقت تقدمت أوروبا الغربية لدرجة مكنتها من تقدير هذه المعارف.

4

وكما سبقت الإشارة إلى أن أولى المدن التجارية الضخمة التي ظهرت في إيطاليا أثناء القرنين الثاني عشر والثالث عشر واستمر ازدهارها التجاري بين العالم العربي وشمال أوروبا هي جنوا وَبيزا والبندقية وَميلانو وَفلورنسا. ذهب التجار الإيطاليون إلى المشرق ودرسوا حضارته وخير شاهد على ذلك هو رحلات ماركو

1ـ إحدى الحملات العسكرية التي شنتها الدول النصرانية في القرون الحادي والثاني والثالث عشر على المشرق ـ المورد، المترجم

بولو الباسلة كما هو الحال مع التجار الأيونيين قبل أكثر من ألفي عام، فقد حاولوا دراسة علوم وفنون الحضارات القديمة لا لهدف استنساخها فحسب، بل استيعابها لتناسب مجتمعاتهم التجارية التي أبدت نمواً في المصارف وبدايات للصناعة في ثوبها الرأسمالي وذلك مع القرنين الثاني والثالث عشر.

ليوناردو بيزا Leonardo of Pisa أول تاجر غربي تبلغ دراساته الرياضياتية درجة من النضج، ويسمى أيضاً فيبوناشي Fibonacci (ابن بوناشي) زار الشرق بصفة تاجر وبعد عودته كتب عمله الموسوم Liber Abaci الصادر في عام 1202، يحتوي على كم هائل من المعلومات الحسابية والجبرية التي جمعها أثناء جولته، ولديه عمل آخر نشر في 1220 تحت عنوان Practica Geometriae [الهندسة العملية] يصف فيه ما تم اكتشافه في الهندسة وحساب المثلثات، وكما يبدو أن فيبوناشي باحث ماهر من حيث ما تحتويه مؤلفاته من أمثلة لا تتطابق إطلاقاً مع الأدبيات العربية[1].

ومع ذلك فقد اقتبس ليوناردو من الخوارزمي عندما تناول المعادلة $x^2+10x=39$ على سبيل المثال، أما المسألة التي أدت إلى "متتالية فيبوناشي": ....5.1.1.2.3.5.8.13.21 بحيث يمثل كل حد مجموع الحدين السابقين، وكما تبدو فإنها شيء جديد. وبالمثل برهانه الرائع الذي يتناول جذور المعادلة $x^3+2x^2+10x=20$ التي لا يمكن التعبير عنها بواسطة الأعداد الصماء الإقليدية $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ (لذا لا يمكن أن تنشأ عن طريق المسطرة والفرجار). لقد برهن عليها ليوناردو بالتحقق من كل حالات إقليدس الخمس عشرة، ثم حل الجذر الموجب لهذه المعادلة تقريبياً وأوجد لها ست منازل ستينية.

تأتي متتالية فيبوناشي من المسألة التالية:

كم عدد أزواج الأرانب في العام، الناتجة عن زوج واحد، إذا كان:

أ) كل زوج يلد زوجاً جديداً في الشهر ويكون قادراً على الإنجاب في الشهر الثاني.

ب) عدم حدوث وفيات.

1- L.C. Karpinski, [Amer. Math. Monthly, Vol. 21 (1914), pp. 37-48] وحسب ما جاء في مخطوطة باريس لـ جبر أبو كامل، فإنها تزعم أن ليوناردو حذا حذو أبو كامل حول هذه المسائل.

يعتبر Liber Abaci أحد المصادر الذي عرّف أوروبا الغربية بنظام الترقيم الهندي - العربي، علماً أن استخداماته كانت تتداول من حين إلى آخر قبل ليوناردو بقرون، عندما جاء به التجار والسفراء والباحثون والحجاج والجنود القادمون من أسبانيا والمشرق. تحتوي أقدم المخطوطات الأوروبية على ترقيم Codex Vigilanus والمكتوب باللغة الأسبانية عام 976. وهكذا فإن إدخال الرموز العشرة إلى أوروبا الغربية كان نوعاً ما بطيئاً، ولكن يعود تاريخ أحدث مخطوط فرنسي إلى عام 1275. ظل نظام الترقيم اليوناني إلى جانب الأدرياتيكي Adriatic غامضاً لقرون عديدة.

كانت الحسابات تتم بواسطة المعداد القديم وهو عبارة عن لوح وعدادات أو بلورات صخرية (غالباً ما تكون خطوطاً مرسومة (محفورة) في الرمل) مشابهة من حيث المبدأ لألواح العد التي لا تزال تستخدم من قبل الروس والصينيين واليابانيين.

استخدم الترقيم الروماني في تدوين نتائج الحسابات التي تتم بواسطة المعداد. لاقت الأعداد الهندية - العربية معارضة شديدة في أوساط الناس عندما تم تقديمها من حيث صعوبة قراءة هذه الرموز في كتب التجار، وتبعاً لتشريعات Arte del Cambio لعام 1299 منع صيارفة فلورنسا من استخدام الأعداد العربية والتزموا استخدام الأحرف الرومانية، ولكن مع القرن الرابع عشر بدأ التجار الإيطاليون استخدام بعض الأعداد العربية في كتب المحاسبة[1]، ومن حين إلى آخر نجد أشكالاً تتوسطهم مثل $II^{m}III^{c}XV$ للعدد 2315.

1- وفي كتب المحاسبة لمدسي Medici (يعود تاريخها إلى عام 1406) مجموعة سلفريج Selfridge المودعة في المدرسة العليا لإدارة الأعمال بهارفارد Harvard، تظهر الأعداد الهندية - العربية إما على هيئة سرد أو عمود وصفي ومع عام 1439 وما بعد اخذت هذه الأعداد محل الأعداد الرومانية إما بصورة نقود أو عمود فعلي مدخلاً للكتب الابتدائية - الدوريات والكتب التالفة وغيرها - ليس حتى 1482 حيث هجرت الأعداد الرومانية في أعمدة النقود، واستمرت الأعداد الهندية - العربية من عام 1494في جميع كتب مدسي للمحاسبة (من رسالة كتبها الدكتور فلورنس إدلر دو روفر).
Florence Edler De Roover انظر ايضاً F.Edler, Glossary of Medieval Terms of Business (Cambridge, Mass, 1934), p.389.

5

بدأ الاهتمام بالرياضيات مع توسع التجارة على الرغم من أن انتشارها كان بطيئاً في المدن الشمالية، وكانت الرياضيات في بدايتها تخدم الأغراض العملية أساساً. ولقرون كان الحساب والجبر يدرس خارج الجامعات من قبل أساتذة يتقنون فن الحساب تعلموا ذاتياً وعادة ما كانوا يجهلون الكلاسيكيات كما يقومون أيضاً بتعليم مسك الدفاتر وأصول الملاحة؛ ترك هذا النمط من تعليم الرياضيات آثاراً محددة ولفترة طويلة والذي يعود إلى جذور عربية وخير شاهد هو ألفاظ مثل "جبر" و "خوارزمية".

لم تلفظ الرياضيات التخمينية أنفاسها أثناء العصور الوسطى رغم أن ثمارها قطفت ليس من ذوي الخبرة فحسب، بل من قبل الفلاسفة المدرسيين، وهنا تضم دراسات أفلاطون وأرسطو بتأملاتها حول طبيعة الألوهية، مما أدى إلى تخمينات حاذقة حول طبيعة الحركة والاستمرارية واللانهائية. لقد حذا أورجن Origen حذو أرسطو فيما يتعلق بدحض وجود اللانهائية الفعلية (واقعية) actual، ولكن القديس أوغسطين St. Augustine في عمله الموسوم Civitas Dei [مدينة الله] سلم بأمر متوالية الأعداد الصحيحة باعتبارها لانهائية فعلية. كانت كلماته ذات تأثير قوي مما دفع جورج كانتور أن يعتبر أعداده الموغلة (ما بعد المنتهي) transfinite بأنها لن تكون أكثر دقة مما دافع عنها القديس أوغسطين[1].

لقد تقبل الكتاب المدرسيون للعصور الوسطى وتحديداً القديس توما الأكويني St.Thomas Aquinas فكرة أرسطو القائلة: infinitum actu non datur[2] ولكن اعتبر أن كل استمرارية (اتصال) ممكن للتقسيم إلى ما لانهاية [أي قابلة للتقسيم اللانهائي

1- G.Cantor, "Letter to Eulenburg (1886)", Abhandlungen (Berlin,1932), pp.401-02.
اقتطف العبارة كانتور من الكتاب XII الفصل XVIII "مدينة الله" (ترجمة هيلي Healey) تحت عنوان "ضد أولئك الذين يقولون إن اللانهائية فوق معرفة الله".

2- "ليس هناك لانهائية فعلية" انظر أيضاً:
E.Bodewig," Die Stellung des hl.Thomas von Aquino zur Mathematik", Archiv. F. Geschichte der Philosophie, Vol. 41 (1932), pp 408-34

جهدياً potentially. إذاً لا يوجد هناك خط أصغر، والنقطة ليست جزءاً من الخط المستقيم لأنها غير قابلة للانقسام: ex indivisilibus non potest compare aliquod continuum.[1] فالنقطة يمكن الحصول عليها ثم تولّد خطاً بالحركة. كان لمثل هذه التخمينات تأثير في مبتكري حساب اللامتناهي في الصغر للقرن السابع عشر وفي فلاسفة القرن التاسع عشر الذين تناولوا مفهوم الموغل (ما بعد المنتهي) أمثال كافالري Cavalieri وَتاكو Tacquet وَبولزانو Bolzano وَكانتور، والذين كانوا على دراية بأعمال الباحثين المدرسيين ولكنهم أبحروا في مقاصد أفكارهم.

عادة ما يتوصل رجال الكنيسة هؤلاء إلى نتائج رياضياتية جداً مباشرة وتسترعي الاهتمام. تيقن توماس برادواردن T. Bradwardine رئيس أساقفة كانتربوري Canterbury من دراسة نجمة متعددة الأضلاع بعدما درس أعمال بويتوس Boetius، ويعتبر نيكول آورسمي واحداً من أهم رياضياتي القرون الوسطى والأسقف ليزو النورماندي الذي تقوم أعماله حول القوى (الأسس الكسرية). وإذا كان لدينا $8^2 = 64 = 4^3$ نجده يكتب 8 بالصورة $4\left|{}^{\frac{1}{2}}1^{p}\right|$ أو $4\left[\frac{p.1}{1.2}\right]$ ويقصد به $4^{1\frac{1}{2}}$

وكتب كراسة تسمى De latitudinibus formarum (1360 تقريباً)، حيث رسم بيانياً المتغير المعتمد مقابل المتغير المستقل القابلين للتغير. توضح هذه الأمور نوعاً من التحول الغامض للإحداثيات الأرضية أو القبة السماوية والمعروفة عند القدماء وللهندسة الإحداثية الحديثة. طبع هذا الكراس مرات عدة بين الفترتين 1482 و 1515 وربما كان له تأثير في رياضياتي عصر النهضة ومن بينهم ديكارت.

6

مر المسار الرئيس للتقدم الرياضياتي عبر نمو المدن التجارية تحت التأثير المباشر للتجارة والملاحة وعلم الفلك والمساحة، وكان أهالي المدن يهتمون في قضايا العد والحساب والحسابات.

1ـ لا يمكن للاستمرارية ان تتألف من اشياء غير قابلة للتقسيم

حيث دلل سومبارت Sombart على هذه الرغبة لمواطني القرنين الخامس والسادس عشر في كتابه Rechenhaftigkeit[1]. كان الرواد المولعون بالرياضيات العملية هم في واقع الأمر أساتذة حساب، ونادراً ما يستعينون بالجامعي القادر على فهم أهمية تطوير أساليب الحوسبة عبر دراسته لعلم الفلك. كانت المدن الإيطالية والأوروبية مثل نورمبرغ وَفيينا وَبراغ مراكز لحياة جديدة، وعلى إثر سقوط القسطنطينية في عام 1453 الذي هو نهاية للإمبراطورية البيزنطية توجه الباحثون الإغريق إلى المدن الغربية، وهكذا غدا التوق إلى النصوص الإغريقية الأصلية في تسارع وأصبح الأمر متاحاً في تحقيق هذه الرغبة. انضم أساتذة الجامعات مع الرجل المثقف العادي في دراسة هذه النصوص وأولى أساتذة الحساب الأذن الصاغية وحاولوا فهم المعرفة الجديدة بطريقتهم الخاصة.

ونموذجاً لهذه الفترة نجد يوهان مولر J.Müller الكونغسبيرجي Köinigsberg[2] أو ريغومنتانوس Regiomontanus أحد أعلام رياضياتي القرن الخامس عشر. إن أنشطة الحاسوب الهائلة وصناع الأدوات والطابعات توضّح لنا التقدم الذي أحرزته الرياضيات الأوروبية أثناء قرنين بعد ليوناردو[3]، كان نشطاً في ترجمة ونشر المخطوطات الرياضياتية الكلاسيكية لتكون متاحة. كان أستاذه فلكياً من فيينا يدعى جورج بورباخ G. Peurbach - صاحب جداول فلكية ومثلثاتية - سبق وأن شرع في ترجمة فلك بطليموس عن اليونانية. ولقد أكمل هذه الترجمة ريغومنتانوس كما قام أيضاً بترجمة أعمال أبولينوس وَهيرون وأكثرها مشقة أعمال أرخميدس. ويعد عمله الرئيس De triangulis omnimodus libri quinque (لعام 1464 ولم يطبع إلا في عام 1533) مقدمة كاملة في حساب المثلثات ويختلف كثيراً عن نصوصنا الحالية من حيث غياب الرموز التي نألفها، فهو يحتوي على قانون الجيب للمثلث الكروي،

1- W.Sombart, Der Bourgeois (Munich, Leipzig, 1913), p.164. تشير كلمة Rechenhaftigkeit الى الرغبة في الحساب، والاعتقاد في فائدة الأعمال الحسابية.

2- ليست هي المدينة الواقعة على بحر البلطيق (حالياً كالننغراد)، وإنما مدينة صغيرة في جنوب بافاريا.

3- ربما يقصد المؤلف هنا ليوناردو دافنشي. المترجم.

وجزءاً كبيراً من المبرهنات كان يعبر عنها بالكلمات، ومن هنا أصبح حساب المثلثات علماً مستقلاً عن الفلك.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن نصير الدين الطوسي أنجز عملاً شبيهاً بذلك في القرن الثالث عشر ولسوء الحظ لم يكتب لعمله التقدم، بينما كان لكتاب ريغومنتانوس تأثير عميق في تقدم حساب المثلثات وتطبيقاته في الفلك والجبر، كما كرّس هو الآخر جهوداً أكثر في حساب الجداول المثلثاتية، فمثلاً جداول الجيب حتى نصف قطر 60 لفترات الدقيقة الواحدة والتي تمت طباعتها بعد وفاته.

تم تعريف الجيوب sines التي هي قطع أو تقسيمات خط باعتبارها شبه أوتار الزوايا المقابلة في دائرة، وقيمتها العددية إذاً تعتمد على طول نصف القطر، وإذا كان طول هذا النصف كبيراً فإنه يعطي دقة عالية في قيم الجيوب دون الحاجة إلى إدخال الكسور الستينية (أو العشرية). لذا فإن الاستخدام المنتظم لنصف قطر الوحدة (1) مفهوم الجيب والظل وغيرها باعتبارها نسباً (أعداداً) هي من فضل آويلر (1746).

٦

حتى الآن لم تؤخذ أي خطوة حاسمة تجاه الإنجازات القديمة التي حققها الإغريق والعرب، وظلت الكلاسيكيات ليست أكثر تفوقاً على العلوم ne plus ultra. وجاءت أخيراً المفاجأة السارة عندما بيّن الرياضياتيون الإيطاليون مع بداية القرن السادس عشر أن من الممكن تحسين النظرية الرياضياتية التي غفل العرب القدماء عنها، وقادت هذه النظرية إلى حل جبري عام للمعادلة التكعيبية التي اكتشفها سيبيودل فيرو Scipiodel Ferro وتلامذته في جامعة بولونا Bologna.

استمرت المدن الإيطالية في إبراز براعتها في الرياضيات بعد عصر ليوناردو، وفي القرن الخامس عشر كان أساتذة الحساب لديهم الباع الطويل في العمليات الحسابية ومن ضمنها المتعلقة الجذور الصم (الخالية من أي شكوك هندسية) وكان رساموهم هندسيين بارعين. وبهذا الصدد يؤكد أفاساري في كتابه

Lives of Painters[1] "حياة الرسامين" (1550-1564) الولع الشديد الذي يكنه فنانو القرن الخامس عشر تجاه الهندسة المجسمة (الفراغية).

كان أحد إنجازاتهم هو دراسة فكرة المنظور والذي كان على يد رجال أمثال ألبيرتي Alberti وَبيرو ديلا فرنسيسكا Piero della Francesca ويعرف الأخير أنه كتب كتاباً عن المجسمات المنتظمة، ووجد أساتذة الحساب مفسرهم وشارحهم في الراهب الفرنسيسكاني لوكا باجولي Luca Pacioli الذي طبع كتابه Summa de Arithmetic "جامع الحساب" في عام 1494 وهو أحد الكتب الرياضياتية الأولى التي تمت طباعتها[2] وكتب بالإيطالية - بلغة إيطالية غير محببة - ويحتوي على جميع معارف الحساب والجبر وحساب المثلثات المعروفة آنذاك. ومن هنا أخذت الأعداد الهندية - العربية دورها في الاستعمال ولم تكن الرموز الحسابية مختلفة كثيراً عن رموزنا الحالية؛ واختتم باجولي كتابه بملاحظات حول استحالة حل المعادلتين $x^3 + mx = n$ و $x^3 + n = mx$ حالياً لما يقتضيه وضع العلوم في الوقت الراهن كما هو الحال مع تربيع الدائرة.

بدأ عمل الرياضياتيين في جامعة بولونا من هذه النقطة، وتعتبر هذه الجامعة واحدة من أكبر وأشهر الجامعات في أوروبا مع القرن الخامس عشر، وكانت كلية علوم الفلك تضم ستة عشر محاضراً ويتوافد إليها الطلاب من جميع أصقاع أوروبا للاستماع إلى المحاضرات - وكانت المناظرات تستهوي انتباه الكثير من حشود الجماهير غير المبالية - ومن طلابها الذين يترددون عليها دائماً هم باجولي وَألبرخت دورير Albrecht Dürer وَكوبرنيكوس Copernicus. كانت الميزة لهذا العصر الجديد ليس استيعاب المعلومات الكلاسيكية فحسب، بل خلق أشياء جديدة كي تتجاور الحدود التي رسمتها تلك الكلاسيكيات. وفنون الطباعة واكتشاف أمريكا أمثلة على هذه الاحتمالات، والسؤال المطروح: هل من الممكن التوصل إلى رياضيات جديدة؟ لقد بذل الإغريق والمشارقة جهداً كبيراً في حل

1- Le vite de eccellenti pittori, scultori e architettori (1550).

2- اولى الكتب الرياضياتية المطبوعة هي حساب تجاري (Treviso,1478) والطبعة اللاتينية لكتاب اقليدس"المبادئ" (Venice,Ratdolt, 1482).

معادلة الدرجة الثالثة ولكنهم توصلوا إلى بعض الحالات الخاصة عددياً، وها هم رياضياتيو بولونا يحاولون إيجاد الحلول العامة.

يمكن اختزال هذه المعادلات التكعيبية إلى ثلاثة أنماط:

$$x^3 + px = q \,,\; x^3 = px + q \,,\; x^3 + q = px$$

حيث p و q عددان موجبان. لقد تحرى وتقصى هذه المعدلات الأستاذ سيبو دل فيروScipio del Ferro الذي توفي في عام 1526. وربما ستؤخذ المسؤولية على عاتق بورتو لوتي E.Bortolotti[1] على أساس أن دل فيرو توصل إلى جمع حلول هذه الأنماط ولكنه لم يعلن عنها بل أخبر قلة من زملائه. وعلى الرغم من ذلك، أصبحت كلمة اكتشاف معروفة بعد وفاة سيبو دل فيرو وتم إعادة اكتشاف أساليبه من قبل معلم حساب من البندقية يكنى تارتاليا Tartaglia (ويعني الشخص الذي يتمتم "يفأفئ") في عام 1535، حيث وضح في نتائجه شرحاً للعامة ولكنه احتفظ بأسرار الطريقة التي حصل عليها، وأخيراً كشف أفكاره لطبيب مثقف من ميلانو يدعى كاردانو Hieronimo Cardano الذي استحلفه ألا يبوح بالسر، ولكن عندما نشر كاردانو كتابه الصغير أو بالأحرى النفيس في الجبر بعنوان صارخ Ars Magna [الفن العظيم أو قواعد الجبر] عبّر تارتاليا عن استيائه في الكتاب والطريقة التي تم اكتشافها والاعتراف بالمكتشف والمنتحل نفسه، برز جدال حاد تمخض عنه تحقير كلا الطرفين، حيث دافع باحث شاب عن كاردانو يدعى لودفيكو فيراري Ludovico Ferrari.

ظهرت لنا وثائق مشوقة نتيجة لهذا الخلاف، بعضها لتارتاليا في 1546 والبعض الآخر لفراري في الفترة 1547-1548، ومنه أصبح الحدث برمته معروفاً للعامة نتيجة هذا الاكتشاف البراق وعلى إثره ذاع صيت Ars Magna. وإن الحل المعروف الآن هو حل كاردان Cardan للحالة $x^3 + px = q$ والذي يأخذ الشكل

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}$$

وهنا نجد أن الحل يعرّفنا على كميات تأخذ الصورة $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$ والتي تختلف عن الكمية الإقليدية $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

1- E.Bortolotti, "L'algebra nella scuola matematica Bolognese del secolo XVI," Periodico di Mathematica, ser.4, No. 5 (1925), pp.147-88.

يحتوي كتاب كاردانو Ars Magna [الفن العظيم أو قواعد الجبر] على اكتشاف ألمعي آخر وهو طريقة فراري لاختزال الحل المتعلق بالمعادلة الرباعية العامة للمعادلة التكعيبية. تم اختزال معادلة فراري $x^4+6x^2+36=60x$ إلى $y^3+15y^2+36y=450$. كما أخذ كاردانو بالحسبان الأعداد السالبة وأسماها "خيالية (زائفة)"، ولكن لم يكن قادراً على أن يفعل أي شيء تجاه ما يسمى "الحالة المتعذر اختزالها" للمعادلة التكعيبية من حيث وجود ثلاثة حلول حقيقية تظهر باعتبارها مجموعاً أو فرقاً بما نسميه حالياً الأعداد العقدية (المركبة).

لقد تغلب على هذه الصعوبة آخر وأعظم رياضياتي القرن السادس عشر البولوني [نسبة إلى بولونا] رافائيل بومبلي Raffael Bombelli الذي ظهر عمله في الجبر عام 1572. قدّم هذا الكتاب - وكما هو في الهندسة التي كتبت في 1550، تقريباً ظل مخطوطاً - نظرية متماسكة للأعداد العقدية التخيلية، حيث كتب $3i$ ليعبر عن $\sqrt{0-9}$ (حرفياً $R[0m.9]$ ترمز R للجذر و m للناقص)، مما سمح لبومبلي أن يتعامل مع الحالة المتعذر اختزالها بإثبات على سبيل المثال أن

$$\sqrt[3]{52+\sqrt{0-2209}}=4+\sqrt{0-1}.$$

قرئ كتاب بومبلي على نطاق واسع واختاره ليبنتز لدراسة المعادلات التكعيبية واقتبس منه آويلر لكتابه "الجبر" لأحد فصوله حول المعادلات الرباعية، وحينها فقدت الأعداد العقدية جزءاً من خاصيتها العظيمة على الرغم من أن قبولها لم يتم على نطاق واسع إلا في القرن التاسع عشر.

يا لها من حقيقة غريبة أن يكون تقديم الأعداد التخيلية للمرة الأولى عبر المعادلات التكعيبية ومن الحالة التي يتعذر فيها قبول الحلول الحقيقية، وليس عبر المعادلات التربيعية التي عادة ما تقدمها كتبنا الدراسية.

8

ظل الجبر والحساب المادة المفضلة للاختبارات الرياضياتية لأكثر من عقود، ولم يعد الدافع يأتي من الحسابات Rechenhaftigkeit التجارية للبرجوازية ولكن من

الإقبال أيضاً على المساحة والملاحة من قبل قادة الدول الوطنية الجديدة، وأصبحت الحاجة ملحة على المهندسين لإنشاء الأعمال العامة والتشييدات العسكرية، وظل علم الفلك كما هو في العصور السالفة حقلاً له أهميته للدراسات الرياضياتية. إنه عصر النظريات الفلكية العظيمة التي قام بها كوبرنيكوس Copernicus وَتيكو براه Tycho Brah وَكبلر Kepler ومنها انبثق تصور جديد للكون.

كان الفكر الفلسفي يعكس دائماً الاتجاهات في الفكر العلمي. إعجاب أفلاطون بالتفكير أو المنطق الرياضياتي الكمي بلغ ذروته عند أرسطو، وكما يبدو أن التأثير الأفلاطوني وجد حضوره جلياً في أعمال كبلر ظهرت الجداول المثلثاتية والفلكية على وجه الدقة لا سيما في ألمانيا، حيث تحتوي جداول ريتكوس G.J.Rheticus التي أكملها تلميذه فالنتن أوتو Valentin Otto عام 1596 على قيم لكل النسب المثلثاتية الست لكل عشر ثواني إلى ست منازل، أما جداول بيتسوكوس Pitiscus لعام فقد غدت إلى خمس عشرة منزلة.

لقد تطوّرت أساليب حل المعادلات وتم فهم طبيعة جذورها ولكن التحدي العام انطلق من رياضياتي بلجيكي يدعى أدرين فان رومن Adrian van Roomen لحل المعادلة ذات الدرجة 45:

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12300x^{39}+\ldots-3795x^{3}+45x=A$$

والتي كانت مميزة على مر العصور. اقترح رومن حالات خاصة مثل الآتي:

$$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \quad \text{والذي يعطي قيمة} \quad A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

وهي الحالات التي اقترحت من أجل المضلعات المنتظمة.

استطاع المحامي الفرنسي فرنسوا فيته F.Viète التابع لقضاء الملك هنري الرابع أن يجد حلاً لمسألة رومن عن طريق إبقاء الطرف الأيسر للمعادلة مكافئاً التعبير عن $\sin\varphi$ بدلالة $\sin\varphi/45$. ويمكن إيجاد الحلول إذاً بالرجوع إلى الجداول، حيث توصل فيه إلى ثلاثة وعشرين حلاً على صورة $\sin(\varphi/45-n.8^{\circ})$ مع الاستغناء عن الجذور السالبة، كما استطاع أيضاً أن يختزل حل كاردانو للمعادلة التكعيبية لمعادلة مثلثاتية، وبهذه العملية انزاح الخوف عن الحالة المتعذر اختزالها وذلك بالاستغناء عن الأعداد التخيلية. يمكن إيجاد هذه الحلول الآن في الكتب الدراسية للجبر العالي.

كانت إنجازات فيته الرئيسة منصبة حول تطوير نظرية المعادلات (مثلاً، In artem artem analyticam isagoge,1591) وهو من الأوائل الذين استبدلوا الحروف بالأعداد. ولقد أعاق استخدام العوامل العددية في "البلاغة" الجبرية لمدرسة ديوفانتس المناقشات العامة للمسائل الجبرية، وإن أعمال ذوي الاختصاص لجبر القرن السادس عشر (كلمة Cossists المنحدرة من الكلمة الإيطالية Cosa الدالة على المجهول) أنتج بالأحرى رموزاً في غاية التعقيد. ولكن أظهر عمل فيته الموسوم logistica speciosa رمزية عامة، حيث استخدمت الحروف للتعبير عن العوامل العددية والإشارتان + و - وظفتا بما يعنيه مفهومنا الحالي، وكتبت "A quadratum" عن A^2.

لا يزال هذا الجبر مختلفاً عن جبرنا على الرغم من إصرار فيته على مفهوم الإغريق عن التناسق، حيث كان يتصور أن المساحة هي حاصل ضرب قطاعي خط line segments، إذاً يمكن إضافة قطاعات الخط فقط إلى قطاعات الخط والمساحات إلى المساحات والحجوم إلى الحجوم. تراود بعض الشكوك حول ما إذا كانت المعادلات من الدرجة الأعلى من ثلاث لها معنى فعلاً، لأنه عندئذ ستفسر بأبعاد أربعة مما يجعل تصورها صعباً آنذاك.

إنها الفترة التي وصلت فيها الأساليب الحسابية قمماً جديدة، وأخيراً بدأت تتجاوز إنجازات العالم الإسلامي. لقد طوّر فيته أعمال أرخميدس وتوصل إلى تسعة كسور عشرية للنسبة التقريبية π، وبعد فترة وجيزة استطاع لودلف فان كولن Ludolph Van Coolen أستاذ المبارزة في دلفت أن يحسب تلك النسبة إلى خمسة وثلاثين كسراً عشرياً، حيث استخدم الدائرة التي تمس أضلاع المضلع من الداخل والمضلع المنتظم المحاط بها بأضلاع أكثر، وعبّر فيته أيضاً عن π بصورة جداء لانهائي (1593) و برموزنا الحالية:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\ldots$$

كان التطوير في الأسلوب ناتجاً عن التطوير في الرموز، ولقد بينت النتائج الجديدة بكل جلاء أنه ليس من الصواب القول عن رجال مثل فيته إنهم قاموا بتطوير الرموز، وعبارة كهذه قد تلغي العلاقة القائمة بين الشكل والمضمون. وأصبحت النتائج الجديدة ممكنة فقط بسبب أسلوب الكتابة، وإدخال الترقيم الهندي - العربي، هذا مثال. والمثال الآخر هي الرموز التي نحتها ليبنتز لحساب

التفاضل والتكامل، لأن الرموز المناسبة تعكس الواقع بصورة أفضل بل تدب فيه الحياة ثم تخلق حياة جديدة بدلاً من الرموز الثقيلة، وهكذا أخذت تطبيقات الجبر في الهندسة عند ديكارت بعد جيل مكانتها من تحسينات فيته للرموز.

9

كان الإقبال على المهندسين والحسابيين على وجه التحديد في الدول التجارية الجديدة، لا سيما فرنسا وإنجلترا والأراضي المنخفضة، وهكذا ازدهر الفلك في كل أرجاء أوروبا، ولم تعد المدن الإيطالية على الطريق الرئيس إلى المشرق بعد اكتشاف الخط البحري المؤدي إلى الهند ولكنها ظلت باقية كمراكز مهمة.

نجد هنا من بين الرياضياتيين العظام وحواسيب بداية القرن السابع عشر، سيمون ستيفن Simon Stevin والفلكي يوهان كبلر Johan Kepler ورجلي المساحة أدرين فلاك Adriaen Vlacq وآزشيل دو دكر Ezechiel de Decker.

يعتبر ماسك الدفاتر ستيفن من بروغيس Bruges الذي أصبح مهندساً في جيش الأمير موريس لمنطقة أورانج Orange هو الذي اهتم بأعمال ستيفن حول التوفيق بين القضايا العملية والفهم النظري والأصالة. نشر ستيفن في عام 1585 عمله الموسوم La disme الذي أدخل فيه الكسور العشرية باعتبارها جزءاً من مشروع توحيد منظومة القياسات كلها على أساس النظام العشري، وكانت هذه إحدى التحسينات الممكنة التي بواسطتها تم تقديم نظام الترقيم الهندي - العربي.

يعتبر اختراع اللوغاريتمات تطويراً لحوسبة من نوع آخر، حاول الكثيرون من رياضياتي القرن السادس عشر التلاعب بإمكانية التنسيق بين المتواليات الحسابية والمتواليات الهندسية من منطلق يقوم على أساس تبسيط الجداول المثلثاتية؛ وكان الإسهام المهم قادماً من اسكتلندا على أكتاف رجل مقيم في الملجأ يدعى جون نبير John Napier/Naper الذي نشر عمله الموسوم Mirifici logarithmorum canonis descriptio في عام 1614.

كانت فكرة نبير المحورية هي صوغ متتاليتين من الأعداد مرتبطتين بحيث إذا تزايدت الأولى بمتوالية حسابية تتناقص الأخرى بمتوالية هندسية، ومن ثم فإن

حاصل ضرب (جداء) عددين من المتوالية الثانية سيكون له علاقة إلى حد ما بمجموع العددين المقابلين في المتوالية الأولى ويمكن لحاصل الضرب أن يختزل إلى جمع. وبهذا النظام استطاع نبير إلى حد ما أن يبسط العمل الحسابي الخاص بجيوب الزوايا. كانت محاولات نبير المبكرة غامضة بالأحرى، حيث إن هاتين المتواليتين تتقابلا حسب الصيغة الحديثة بالآتي:

$$y = ae^{-\frac{x}{a}} (x = Nep.\log y)$$

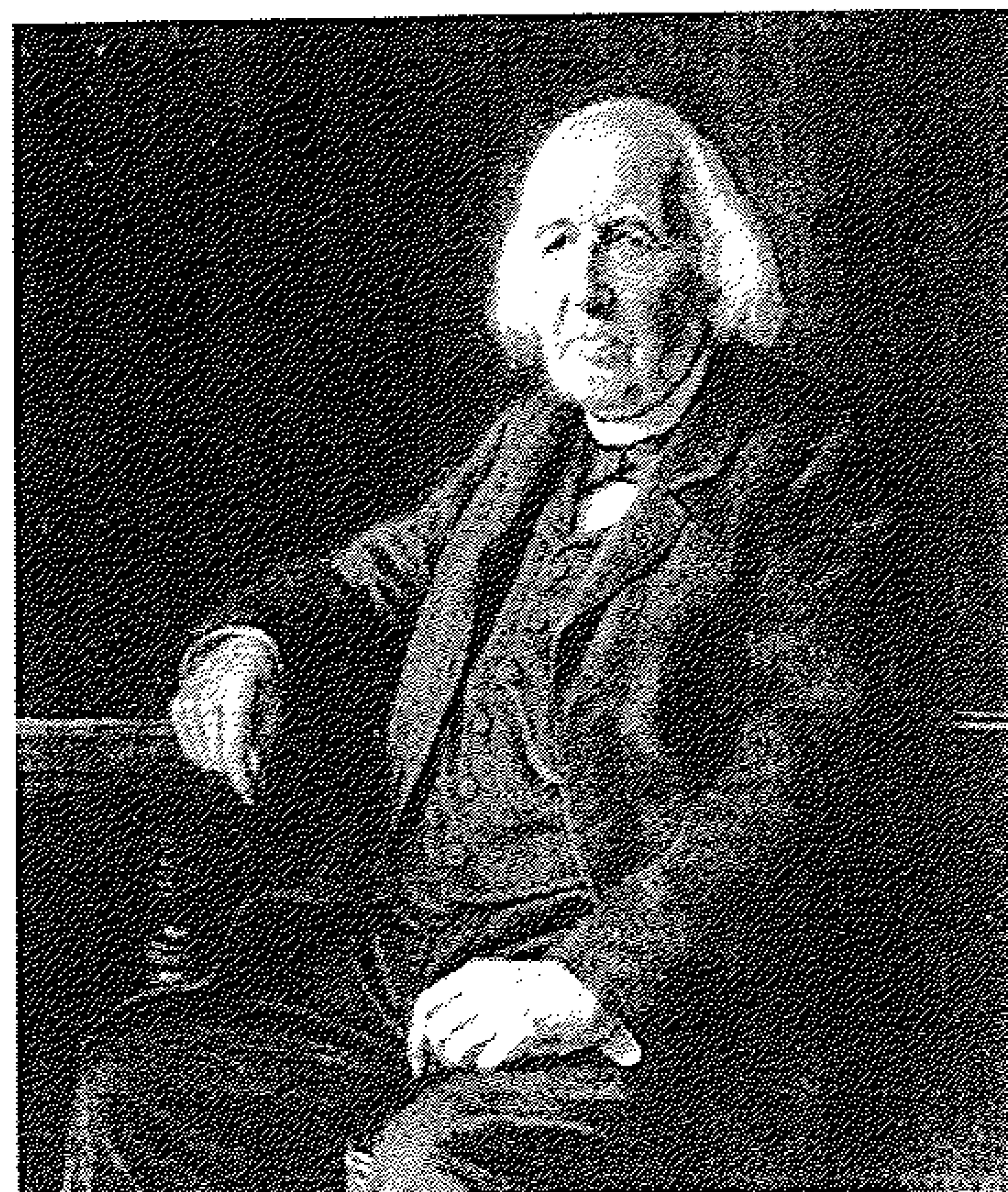
حيث $a = 10^7$.[1] وعندما $x = x_1 + x_2$ فإننا لا نحصل على $y = y_1 y_2$ بل $y = \frac{y_1 y_2}{a}$. لم يكن نبير راضياً عن هذه المنظومة، كما أخبر المعجب به هنري برغيس الأستاذ في كلية غرشام بلندن، لذا قررا أن تكون الدالة على الصورة $y = 10^x$ حيث $x = x_1 + x_2$ تعطي $y = y_1 y_2$. واصل برغيس بعد وفاة نبير هذا الاقتراح وفي عام 1624 نشر عملة الموسوم Arithmetica logarithmica "حساب اللوغاريتم"، والذي يحتوي على اللوغاريتمات البرغيسية [نسبة إلى برغيس] حتى 14 منزلة للأعداد الصحيحة من 1 إلى 20000 ومن 90000 إلى 100000. أما بالنسبة للفراغ الموجود بين 20000 و 90000 فتم التغلب عليه من قبل المساح الهولندي أزشيل دو دكر وبمساعدة فلاك Vlacq. صدر عملهما عام 1627 في غودا مع جداول كاملة للوغاريتمات. رحب الرياضياتيون والفلكيون بالاختراع الجديد وبالذات كبلر الذي كانت له تجربة مريرة وقاسية حول توسيع الحسابات.

سيكون شرحنا للوغاريتمات إلى حد ما عن طريق الأسس ضالاً، إذا ما تتبعناه من الناحية التاريخية. يعود تاريخ الدالة الأسية إلى أواخر القرن السابع عشر ومن هذا الاعتبار لم تكن فكرة القاعدة موجودة في ذهن نبير بعد، فاللوغاريتم الطبيعي القائم على الدالة ظهر متزامناً مع اللوغاريتم البرغيسي، ولم يتم الاعتراف بأهميتها الأساسية إلا عندما استوعب حساب اللامتناهيات الصغرى تماماً[2].

1- إذا $Nep.\log y = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) = 161180957 - 10^7 \ln y;$ $Nep.\log 1 = 161180957$ حيث $\ln x$ هو اللوغاريتم الطبيعي

2- نشر كاتب الملاحة رايت E.Wright بعض اللوغاريتمات الطبيعية عام 1618 و سبيدل Speidell في عام 1619 حتى عام 1770. انظر:

F.Cajori, "History of Exponential and Logarithmic Concepts" Amer. Math. Monthly, Vol.20 (1913), 7 articles.



كارل فيرشتراس (1815-1897)



جورج فريدريك برنارد ريمان (1826-1866)



نيكولاي ايفانوفتيش
لاباتشفسكي (1793-1856)



جورج كانتور (1845-1915)



يعقوب شتاينر (1796-1863)



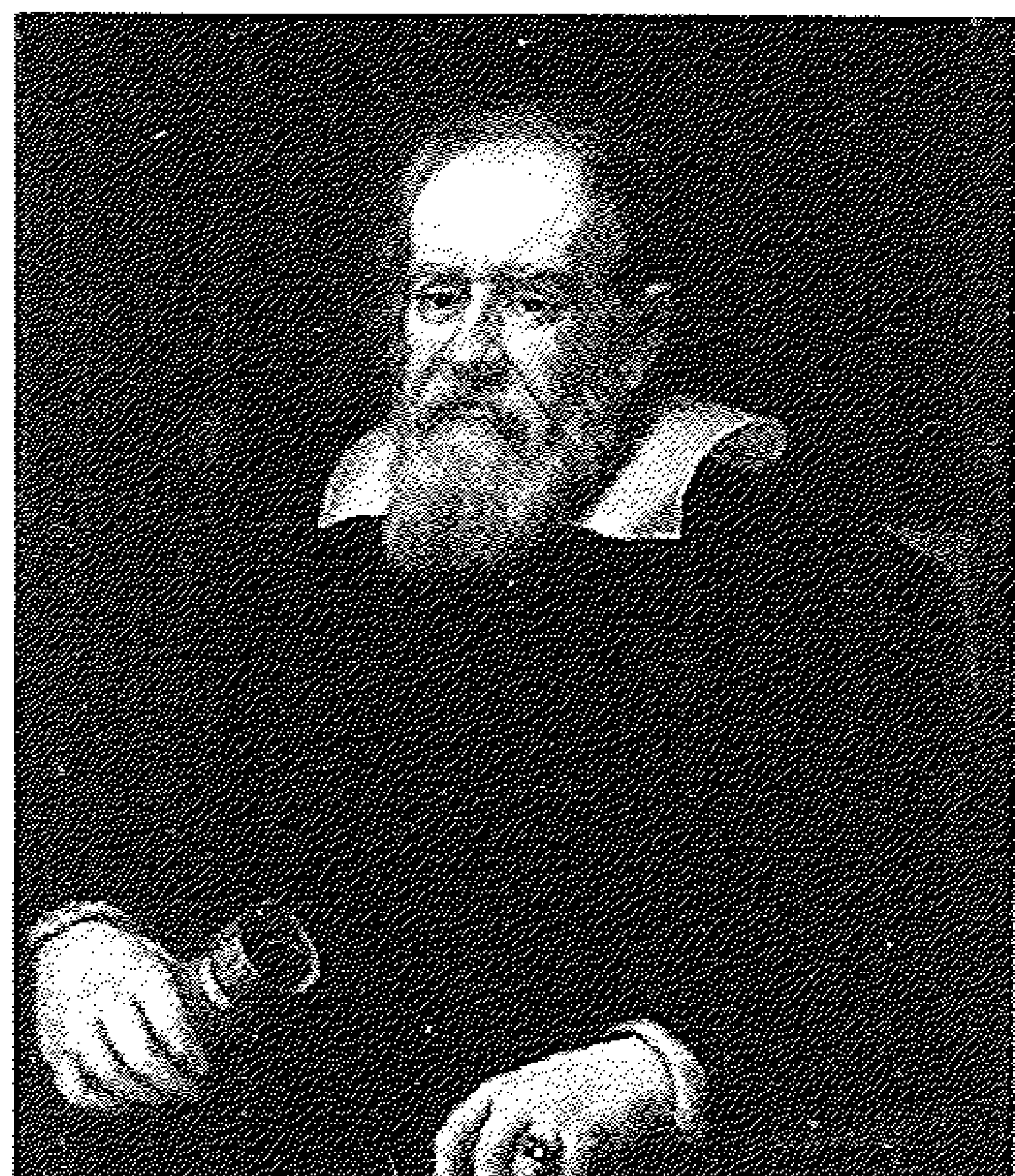
آرثر كايلي (1821-1895)



جون نابير (1617-1550)



فرانسوا فيت (1603-1540)



غاليلو غاليلي (1642-1564)



رينيه ديكارت (1650-1596)



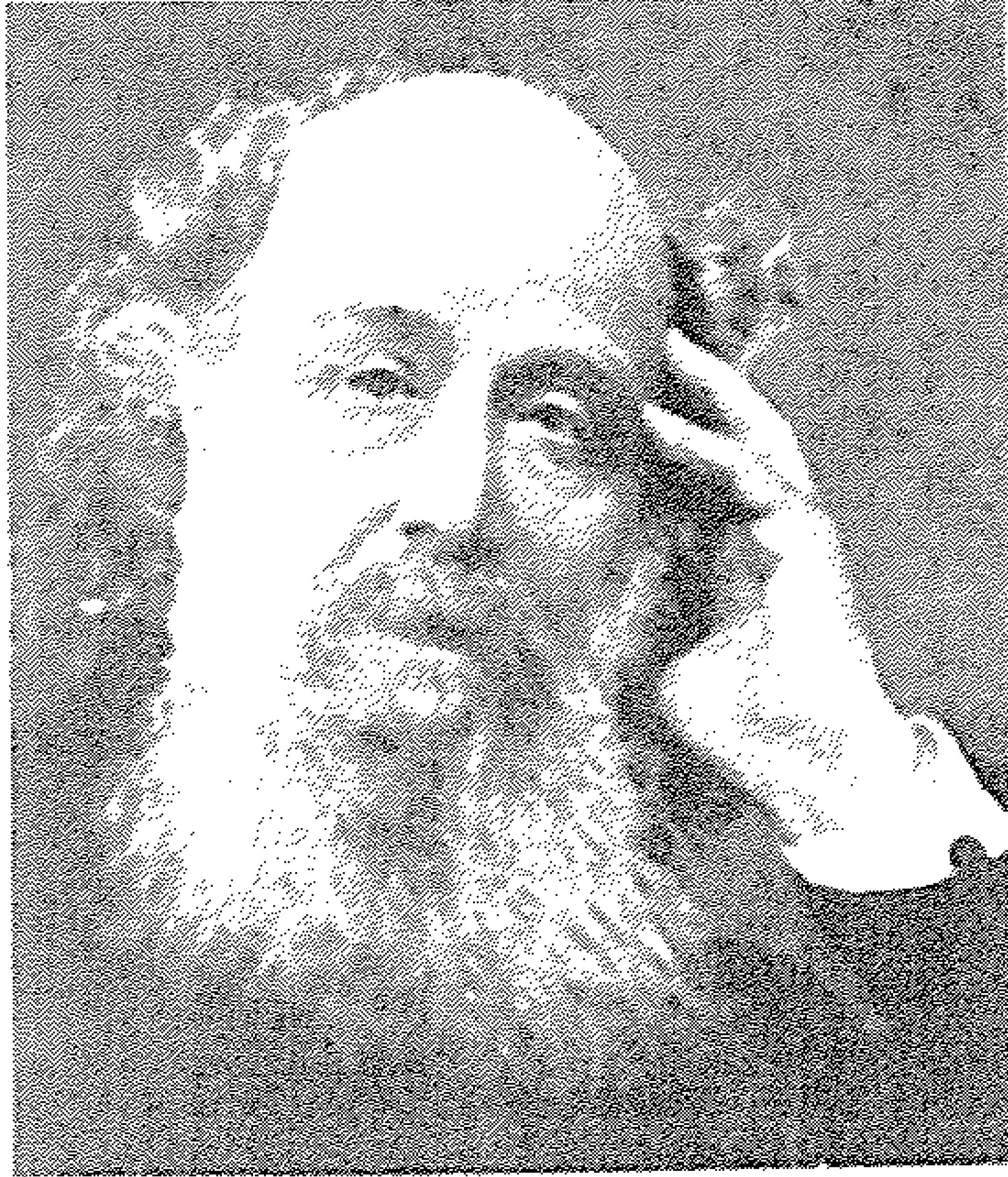
كوتفرد ويلم لايبنز (1716-1646)



اسحق نيوتن (1727-1642)



ويلم روان هاملتون (1865-1805)



جيمس جوزيف سلفستر (1897-1814)



ماريوس سوفس لي (1899-1842)



فيلكس كلاين (1925-1849)



هنري بوانكاريه (1912-1854)



ت. ح ستلتجس (1894-1856)



ليونارد أويلر (1707-1783)



جين لي رون دالمبيرير (1717-1783)



أدرين مار لاجندر (1752-1833)



كارل فريدريك غاوس (1777-1855)



أفرست كالوا (1811-1832)



غاسبر موخ (1746-1818)

الفصل السادس

القرن السابع عشر

لم يكن التطور السريع لرياضيات عصر النهضة ناجماً عن دروس الحسابات التجارية فحسب، بل عن الاستخدامات التي تقدم إنتاجاً أيضاً والأكثر من ذلك كمال الآلات، حيث كانت الآلات معروفة عند الشرق وفي العصور القديمة وهي التي ألهمت عبقرية أرخميدس، ومع هذا فإن وجود العبيد وغياب التقدم الاقتصادي للحياة الحضرية أحبطا استخدام الآلات لهذه الأنماط القديمة من المجتمعات، وهذا ما أشارت إليه أعمال هيرون Heron حيث توصف الآلات لغرض التسلية أو التمويه فقط.

ولكن مع نهاية العصور الوسطى بدأت الآلات في الاستعمال في المصانع الصغيرة وفي الأعمال العامة وفي المناجم، وكانت تعد هذه بمثابة مشاريع أخذت على عاتق تجار المدن أو الأمراء لغرض البحث عن نقود جاهزة وغالباً ما تجرى بالمقابل عند نقابات تجار وصناع المدن، كما حفّزت الحروب والملاحة أيضاً الدقة في صناعة الأدوات وتم استبدالها إلى آلات فيما بعد.

كان مصنع الحرير الموجود في مدينتي لوجا والبندقية مؤسساً تماماً مع بداية القرن الرابع عشر، وكان قائماً على تقسيم العمل وعلى استخدام طاقة المياه. طورت المناجم في أوروبا الوسطى من القرن الخامس عشر إلى صناعة رأسمالية تماماً قائمة تقنياً على أساس استخدام المضخات والآلات الرافعة التي تسمح بحفر ثقوب أعمق وأعمق المستويات. إن اختراع الأسلحة النارية والطباعة وتشييد الطواحين

والقنوات وصناعة السفن للإبحار في المحيطات وكل هذه الأشياء يحتاج إلى مهارة هندسية ثم تجعل الناس أكثر وعياً من الناحية التقنية.

أعطت الساعات الدقيقة خدمة للملاحة والفلك وفي الأماكن العامة، وكان هناك نماذج من الآليات الباهرة أمام الملأ، الانتظام في حركتها والقدرة التي تقدمها للإشارة إلى دقة الوقت مما أعطت انطباعاً عميقاً على العقل الفلسفي. أمست الساعة أنموذجاً للكون في عصر النهضة وحتى القرون المتأخرة، وهذا في حد ذاته عامل مهم في تطور التصور الميكانيكي للعالم.

أدت صناعة الآلات إلى ميكانيك نظري وإلى دراسة علمية للحركة والتغير بوجه عام، وكما أنتجت العصور القديمة نصوصاً حول الاستاتيك (علم السكون) فإن الدراسات الجديدة للميكانيك النظري في الواقع قائمة على علم السكون للكتاب الكلاسيكيين. ظهرت كتب حول الميكانيك قبل اختراع الطباعة بفترة طويلة وأول وصف تجريبي (كيسر Kyeser مع بدايات القرن الخامس عشر) وفيما بعد أوصافاً نظرية كما هو مع كتاب ليون باتيستا ألبرتي Leon Battista Alberti حول العمارة لعام 1450 وكتابات ليوناردو دافنشي لعام 1500.

تحتوي مخطوطات ليوناردو على بدايات نظرية ميكانيكية محددة للطبيعة، كما ناقش تارتاليا في عمله الموسوم Nuova Scienzia لعام 1537 عن صناعة الساعات ومسار القذائف - ولكن لم يتوصل بعد إلى مسار القطع المكافئ Parabolic قبل أن يكتشفه غاليليو Galileo. حفّزت الطبعات اللاتينية الصادرة لهيرون Heron وأرخميدس هذا النوع من البحث ولا سيما طبعة كوماندينو F.Commandino عن أرخميدس التي ظهرت في 1558 وجاءت بالطريقة القديمة عن التكامل كي تكون في متناول الرياضياتيين. طبق كوماندينو بنفسه هذه الأساليب لحساب مركز الجاذبية/الثقالة في عام 1565 رغم أنها أقل دقة من معلمه.

ظل حساب مراكز الجاذبية من الموضوعات المفضلة لطلاب أرخميدس الذين استخدموا في دراساتهم للاستاتيك بغية الحصول على المعرفة الحية للمرحلة الأولية *والتي نطلق عليها الآن حساب التفاضل والتكامل*. سيمون ستيفن من بين طلاب أرخميدس المتميزين الذي كتب عن مراكز الجاذبية والهيدروليك وكلاهما في عام

1586، وكتب لوكا فالريو Luca Valerio عن مراكز الجاذبية في عام 1604 وعن تربيع القطع المكافئ عام 1606، وبول غولدن Paul Guldin صاحب العمل Centrobaryca لعام 1641، كما نجد مبرهنة غولدن حول مركز المتوسط centriod[1] والذي سبق وأن شرحها بابوس Pappus. وجاءت يقظة الرواد الأوائل من الأعمال العظيمة لكبلر وكافالري وتور سيلي وآخرون الذين هم بالتالي قاموا بتطوير أدى إلى اختراع التفاضل والتكامل.

2

إن الناحية النمطية لهؤلاء الباحثين هي رغبتهم في التخلي عن الصرامة أو الدقة الأرخميدسية (نسبة إلى أرخميدس) وذلك للاعتبارات القائمة على غياب الدقة، وأحياناً ما تكون الافتراضات "الذرية" - من المحتمل دون دراية عن أرخميدس في رسالته إلى إيراتوسثينس Eratosthenes أنه كان يستخدم مثل هذه الأساليب لغرض القيمة الموجهة إلى الكشف - وهذا ناتج جزئياً عن نفاد صبر البعض من التعاليم المدرسية[2]، وبالطبع ليس كل الباحثين لأن معظمهم رهبان كاثوليك تدربوا على التعاليم المدرسية.

ارتبطت الثورة في علم الفلك بأسماء مثل كوبرنيكوس وتيكو براه وكبلر حيث فتحت آفاقاً جديدة حول مكانة الإنسان في الكون وقدرته على شرح الظاهرة الفلكية بأسلوب عقلاني، مما أدى إلى تعاظم جرأة رجال العلم لإلحاق الميكانيك الأرضي بميكانيك السماء. كان الحافز الفاعل لعلم الفلك الجديد هو أعمال كبلر حول القضايا التي تتضمن حسابات كثيرة كما هو الحال مع أمور اللامتناهيات الصغرى والتي هي واضحة بذاتها.

1- نقطة التقاء المستقيمات المتوسطة في مثلث. المترجم

2- السكولاستية: الفلسفة النصرانية السائدة في القرون الوسطى وأوائل عصر النهضة والقائمة على منطق ومفاهيم ارسطو الميتافيزيقية، وابرز قادتها توما الأكويني الذي حاول ان يقيم صلة عقلانية بين العقل والدين. المورد - المترجم

غامر كبلر بقدر كبير في حسابات الحجوم للغرض نفسه وليس غير. وفي عمله الموسوم Stereometria doliorum vinorum الصادر في 1615 قدّر حجوم المجسمات الناتجة عن دوران قطاعات القطع المخروطية حول المحور في مستوياتها، ومن هذا المنطلق قضى على الدقة الأرخميدسية، ومساحة دائرته تتألف من مثلثات لانهائية وتشترك برأس واحد عند المركز، وتحتوي كرته على عدد لانهائي من الأهرامات، كما عبّر عن إثباتات أرخميدس بأنها في غاية الدقة والصرامة وعلى حد قوله absolutae et omnibus numeris perfectae[1].

ولكن تركها للراغبين الانغماس في الإثباتات الدقيقة، فكل باحث له الحق والحرية أن يجد النوع الخاص به من حيث الدقة والصرامة أو حتى غيابها.

نحن مدينون إلى غاليليو غاليلي Galileo Galilei بميكانيك جديد يتعلق بالسقوط الحر للأجسام وإلى بدايات نظرية المرونة ومن ثم دفاعه الجريء عن النسق الكوبرنيكي، وفوق هذا كله ندين له أكثر من أي رجل آخر في عصره من حيث إن روح العلم الحديث قائم على تناغم التجربة والنظرية مع الإصرار على استخدام الرياضيات بصورة مكثفة (على الرغم من قلة تجارب غاليليو عما كان يعتقد). تناول غاليليو الدراسة الرياضياتية للحركة وعلاقتها بالمسافة والسرعة والعجلة (التسارع) في كتابه Discorsi [المنهاج (المقالة) لعام 1638، ولم يعط شرحاً وافياً عن فكرته لحساب التفاضل والتكامل تاركاً الموضوع برمته إلى تلميذيه تورسيلي Torricelli وَكافاليري Cavalieri. حقاً، إن أفكار غاليليو حول قضايا الرياضيات البحتة هي دون شك جوهرية وكما تبدو من ملاحظته القائلة: "ليس عدد التربيعات أقل من المجموع الكلي للأعداد كلها والأخير أكبر من السابق"؛ تعتبر هذه الملاحظة دفاعاً عن اللانهائية الفعلية (الحقيقية) (والتي تطرق إليها سالفياتي Salviati في Discorsi) وهي بالفعل موجهة ضد الموقف الأرسطي المدرسي (كما أشار إليها سمبلسيو Simplicio). يحتوي Discorsi على مسارات القطع المكافئ للقذيفة مزوداً بجداول الارتفاع والمدى باعتبارهما دوال زاوية الارتفاع لأي سرعة

1- "مطلق وتام في كل ارجائه".

ابتدائية، ولقد لخص سالفياتي أيضاً أن منحنى السلسلة يشبه القطع المكافئ ولكنه لم يعط وصفاً دقيقاً للمنحى.

حان الوقت الآن لأول شرح منتظم عن النتائج التي وصل إليها والذي نطلق عليه الآن حساب التفاضل والتكامل Calculus. ظهر هذا الشرح في عمل الأستاذ بجامعة بولونا، بونافينتورا كافاليري الموسوم Geometria indivisibilibus continuorum لعام 1635. ينطلق كافاليري من تأسيس صورة بسيطة لحساب التفاضل والتكامل قائم على التصور المدرسي (السكولاستي) الذي يزعم عدم قابلية الانقسام أو التجزئة[1]، وبواسطة الحركة تولّد النقطة خطاً والخط يولّد مستوياً، وهكذا أضاف قطاعات (أجزاء) segments الخط للحصول على المساحة وقطاعات المستوى للحصول على الحجم، ولكن عندما وضّح إليه تورسيلي ذات مرة مشيراً إلى أنه عن طريق هذا الأسلوب باستطاعة المرء أن يبرهن على أن أي مثلث يمكن تقسيم ارتفاعه إلى جزأين متساويين في المساحة، استبدل "الخطوط" "بالخيوط"، إذاً فإن الخطوط هي ذات سمك صغير، وهذا يقودنا إلى النظرية "الذرية". إن أفكار كافاليري حول المساحة الناتجة عن إنشاء الخطوط قادته إلى تصحيح "مفهوم كافاليري" الذي يستنتج أن مجسمين اثنين متساويين في الارتفاع لهما الحجم نفسه، وإذا تقاطع المستوى بقطاعات متساوية الارتفاع فسيكون لها المساحة نفسها، مما تسمح له أن يقوم بإيجاد ما يساوي تكاملات متعددة الحدود.

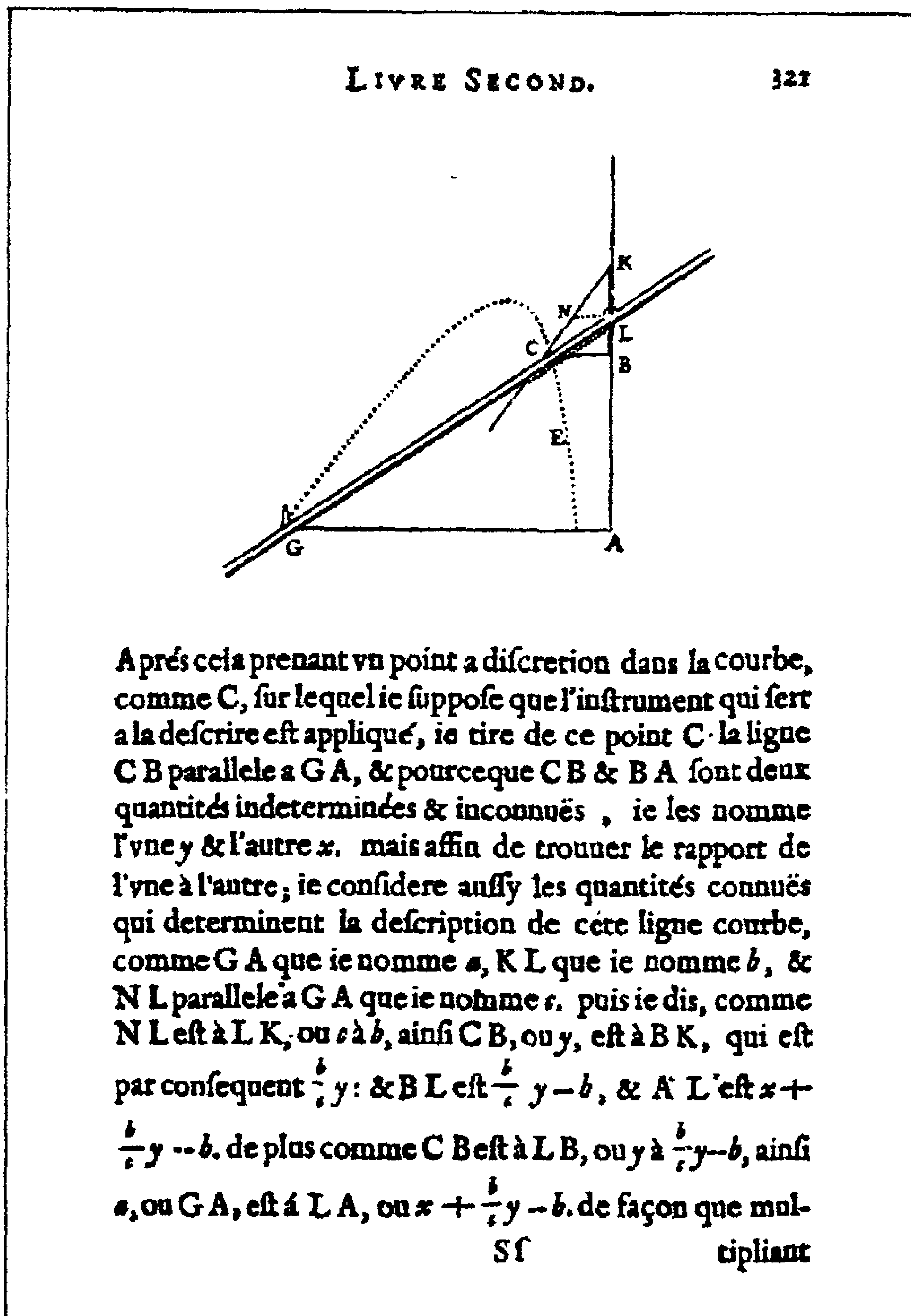
3

حفّز هذا التطور التدريجي لحساب التفاضل والتكامل إلى حد بعيد بنشر كتاب "الهندسة" Géométrie لديكارت Descartes الصادر في 1637 والذي جاء بمجال الهندسة الكلاسيكية برمته إلى مضمار أصحاب الجبر. نشر الكتاب في

1- F.Cajori, "Indivisibles and 'ghost of departed quantities' in the History of Mathematics," Scientia, Vol. 37 (1925), pp. 301-06; E.Hoppe, Zur Geschichte der Infinitesmalrechung bis Leibniz und Newton," Jahresb. Deutsch. Math. Verein, Vol. 37 (1928) , pp. 148-87. On certain statements in Hoppe

انظر C.B.Boyer, The History of Calculus (New York, 1949), pp. 192, 206, 209 (Dover reprint, 1959).

البداية كملحق لكتابه Discours de la Méthode [خطاب المنهج] وهو منهج في العقل، حيث يشرح فيه المؤلف موقفه العقلاني لدراسة الطبيعة. رينه ديكارت فرنسي من تورين عاش حياة النبلاء، وخدم لفترة في جيش موريس في أورانج وأقام لسنوات في هولندا وتوفي في ستوكهولم المدينة التي قدم إليها بناءً على دعوة ملكة السويد. وتوافقاً مع المفكرين العظام الآخرين للقرن السابع عشر سعى ديكارت إلى الطريقة العامة من أجل التمهيد إلى الاختراعات ثم التوصل إلى الحقيقة في العلوم، وبما أن العلم الطبيعي الوحيد المعروف آنذاك بالانتظام والتساوق هو الميكانيك، وأن سر فهم الميكانيك هو الرياضيات غدت الرياضيات وسيلة لفهم الكون. وعلاوة على ذلك تعابيرها المقنعة هي في حد ذاتها مثال ساطع على أن الحقيقة يمكن إيجادها في العلم، لذا جاءت الفلسفة الميكانيكية لهذا العصر باستنتاج مشابه إلى الأفلاطونيين، ولكنه منطق مغاير تماماً. يعتقد الأفلاطونيون بتناغم أو تناسق الكون بينما يعتقد الديكارتيون بطريقة عامة قائمة على أساس المنطق أو العقل، وكلتا النظرتين وجدتا في الرياضيات أنها ملكة العلوم.


LIVRE SECOND. 321

Aprés cela prenant vn point a difcretion dans la courbe, comme C, fur lequel ie fuppofe que l'inftrument qui fert a la defcrire eft appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A font deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie confidere auffy les quantités connuës qui determinent la defcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eft à L K, ou c à b, ainfi C B, ou y, eft à B K, qui eft par confequent $\frac{b}{c}y$: & B L eft $\frac{b}{c}y - b$, & A L eft $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eft à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainfi a, ou G A, eft á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

Sf tipliant

صفحة من كتاب الهندسة لديكارت

نشر ديكارت كتابه "الهندسة" باعتباره تطبيقاً للطريقة العامة للتوحيد، أي توحيد الجبر والهندسة، والميزة الأساسية لهذا الكتاب حسب النظرة الشائعة هو ما يحتويه من إبداع بصدد ما يسمى الهندسة التحليلية؛ صحيح أن هذا الفرع من الرياضيات تطور فيما بعد تحت تأثير كتاب ديكارت، ولكن يبقى كتاب الهندسة هذا كتاباً غير دراسي حول هذا الموضوع، من حيث لا توجد فيه "إحداثيات ديكارتية" ولا معادلات للخط المستقيم ولا اشتقاقات للقطع المخروطية اللهم معادلة من الدرجة الثانية تم تفسيرها باعتبارها تمثلاً للقطع المخروطية. وعلاوة على ذلك يحتوي القسم الأكبر من الكتاب على نظرية للمعادلات الجبرية تتضمن "قاعدة ديكارت" لتحديد عدد الجذور (الحلول الموجبة والسالبة) (أسماها جذور صادقة وكاذبة).

يجب أن نضع نصب أعيننا أن أبولينوس سبق وأن كان له تصور للقطاعات المخروطية والذي نسميه الآن إحداثيات - مع ليبنتز - وإنه يخلو من القيم العددية، علماً بأن الارتفاع والطول في جغرافية بطليموس هما إحداثيان عدديان. كان لدى بابوس في "مجموعة أعماله" (Analyomenos) "كنز من التحليل" من حيث ليس لدينا سوى تحديث الرموز ومن ثم الحصول على تطبيقات الجبر في الهندسة. ظهر بصيص من التمثيل البياني قبل ديكارت وتحديداً في أعمال آورسمي Oresme. تكمن أفضلية ديكارت على الجميع في تطبيقاته المتماسكة لجبر مطوّر تماماً للقرن السادس عشر قائماً على التحليل الهندسي للعصور القديمة ومن ثم قابليتها للتطبيق وسعة أفقها، والميزة الثانية هي رفض ديكارت القاطع لشروط التجانس التي يأخذ بها سابقيه والتي سحقها عمل فيته logistica speciosa، لذا اعتبرت الآن x^3, x^2xy بمثابة قطاعات خط line segments. وهكذا أصبحت المعادلة الجبرية علاقة بين الأعداد، وهذا في حد ذاته خطوة جديدة إلى الأمام في التجريد الرياضياتي، لذا تمت الاستفادة منه في تطورات جبرية لاحقة لمعالجة المنحنيات الجبرية عموماً. بدأ الغرب في اللحاق بالتراث الحسابي - الجبري الشرقي سرعته الفائقة.

استخدم ديكارت رموزاً حديثة، كما نجد في كتاباته تعبيرات من نوع $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ والتي تختلف عن رموزنا بقدر طفيف، فهو يستخدم aa للدلالة عن a^2 (وجدت أيضاً في كتابات غاوس) وكذلك aaa عن a^3 و $aaaa$ عن a^4 إلخ.

ليس من الصعب أن تجد أسلوباً واحداً في كتاباته، ولكن يجب ألا نبحث عن هندستنا التحليلية الحديثة.

نقترب الآن قليلاً من الهندسة التحليلية، حيث نلتقي بمحام من مدينة تولوز يدعى بيريه فيرما Pierre Fermat الذي كتب ورقة بحثية قصيرة في الهندسة، ومن المحتمل أنها كتبت قبل صدور كتاب ديكارت ولكن لم تنشر إلا في عام 1679 ونجد في هذا Isagoge المعادلات الآتية:

$$y = mx, xy = k^2, x^2 + y^2 = a^2, x^2 \pm a^2 y^2 = b^2$$

والتي حددت الخطوط (المستقيمات) والمخروطيات بالنسبة إلى منظومة المحاور (غالباً العمودية). ومع أنها كتبت بالرموز التي استعملها فيته إلا أن الورقة تبدو مهجورة بالنسبة إلى "هندسة" ديكارت. وفي الوقت الذي طبعت فيه ورقة فيرما Isagoge نجد مطبوعات أخرى طبق فيها الجبر على نتائج أبولينوس، أبرزها Tractatus de sectionibus conicis الصادرة في 1655 لـ جون والس John Wallis، وجزءاً من كتاب متقاعد عجوز من هولندا يدعى جون دي وت John De Witt الموسوم Elementa curvarum linearum في 1659؛ كلا العملين كتبا تحت تأثير ديكارت المباشر. كان التقدم بطيئاً جداً مع عمل لاهوسبيتال لويكتب أيضاً لاهوبيتال L'Hopital الموسوم Traite analytique des sections coniques لعام 1707 وهي ليست سوى نسخة أبولينوس إلى لغة جبرية. تردد الكثير من الباحثين حول التسليم بالقيم السالبة للإحداثيات، كان نيوتن أول من تناول موضوع المعادلات الجبرية بجرأة في دراسته للمنحنيات التكعيبية عام 1703. ولكن أول هندسة تحليلية شرحت القطع المخروطية شرحاً وافياً منذ ظهور عمل أبولينوس هو عمل آويلر Introductio لعام 1748 "المقدمة".

4

لقد حفّز ظهور كتاب كافاليري عدداً ملفتاً من رياضياتي مختلف البلدان لدراسة المسائل المتعلقة باللامتناهيات في الصغر، ومن هذا المنطلق بدأ الاقتراب إلى

المسائل الأساسية الأكثر تجريداً وبناءً عليه أخذت عموميتها. تحتوي مسألة المماس على البحث عن الأساليب التي عن طريقها يمكن إيجاد المماس لأي منحن عند أي نقطة، وهي المسألة التي أخذت مكاناً مرموقاً بجانب المسائل العتيقة التي تهتم بالحجوم ومراكز الجاذبية (الثقالة). هناك اتجاهان في سياق البحث هذا أحدهما: الهندسي والآخر جبري، أتباع كافاليري وفي مقدمتهم تورسيلي و إسحاق بارو I.Barrow - أستاذ نيوتن - يحبذون الأسلوب الإغريقي للتفكير الهندسي دون الإيعاز الشديد إلى الدقة والصرامة، بينما يبدي هويجنز تحيزاً معيناً لهندسة الإغريق، وهناك آخرون وأبرزهم فيرما وَديكارت وَجون والس أبدوا اتجاهاً معاكساً، ومع ذلك جاؤوا بجبر جديد كي يستوعب الموضوع. عملياً، جميع الباحثين للفترة 1630-1660 حشروا أنفسهم في قضايا تتعلق بالمنحنيات الجبرية ولا سيما تلك التي تأخذ الصورة $a^m y^n = b^n x^m$. وتوصلوا كل بطريقته الخاصة إلى صيغ مرادفة: $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$ أولاً: للعدد الصحيح الموجب، وثانياً: للعدد الصحيح السالب والكسري. نادراً ما يظهر المنحنى غير الجبري كدويري cycloid (روليت) الذي تحراه ديكارت وَبلزيه باسكال، وفي عمل باسكال الموسوم Traité général de la roulette لعام 1658 [أطروحة عامة حول الروليت] وجزء من كتيب نشر تحت اسم ديتونفيل A.Dettonville مما كان له تأثير كبير في ليبنتز الشاب[1].

بدأت تظهر في هذه الفترة ملامح عدة لحساب التفاضل والتكامل، وفي عام 1638 اكتشف فيرما طريقة لإيجاد الأصغرية minima والأعظمية maxima، وذلك بتغيير طفيف للمتغير في المعادلة الجبرية البسيطة ثم إخفاء هذا التغيير، ومع عام 1658 قام يوهانس هوده Johannes Hudde بتعميمها إلى منحنيات جبرية أكثر عمومية. هناك تحديدات للمماسات والحجوم ومراكز المتوسط، ولكن العلاقة بين التفاضل والتكامل باعتبارها قضية عكسية لم يتم استيعابها إلا بعدما قام بارو Barrow بشرحها رغم صعوبة صورتها الهندسية في 1670.

1- H.Bosmans, "Sur l'oeuvre mathematique de Blaise Pascal," Revue des Questions Scientifiques, Vol 4,Ser.5 (1929) ,pp.136-60,424-50; J.Guitton, Pascal et Leibniz (Paris,1951).

كان باسكال من حين إلى آخر يستخدم المفكوكات بدلالة الكميات الصغيرة في حين كان يسقط الحدود ذات الأبعاد الأدنى - شارحاً بإسهاب فرضية نيوتن المثيرة للجدل وهي $(x+dx)(y+dy)-xy = xdy+ydx$. دافع باسكال عن هذه الطريقة مناشداً الحدس (esprit de finesse) بدلاً من المنطق (esprit de géométrie) وهنا نجده يشن هجوماً على انتقادات الأسقف بيركلي إلى نيوتن[1].

دخل الفكر السكولاستي هذا البحث من أجل أساليب جديدة ليس فقط عبر أعمال كافاليري ولكن عبر أعمال البلجيكي اليسوعي غريغوري دي سانت - فنسنت Gregoire de Saint-Vincent وتلامذته ومشاركيه أيضاً، مثل بول غولدن P.Guldin وأندريه تاكوه A. Tacquet. ألهم هؤلاء الرجال بروح عصرهم وبكتابات مدرسيو القرون الوسطى حول طبيعة الاستمرارية وسمو المثل، كما تظهر هنا في كتاباتهم ولأول مرة مفردة "النفاد" التابعة لطريقة أرخميدس. كان لكتاب تاكوه On Cylinders and Rings الصادر في 1651 تأثير في باسكال.

أدى هذا النشاط المتقد لهؤلاء الرياضياتيين في فترة لم تكن الدوريات العلمية متاحة إلى عقد حلقات ومناقشات ومراسلات منتظمة، ونال بعض الرّواد التقدير على خدماتهم باعتبارهم مراكز للتبادل العلمي. ومن بين هؤلاء الرجال المعروفين ذائعي الصيت الراهب الفرنسيسكاني الأب مارين مِرسيني Marin Mersenne المحفوظة ذكراه بصفته رياضياتي صاحب الأعداد التي تحمل اسمه "أعداد مرسيني" [هي الأعداد الأولية التي تأخذ الصورة $2^n - 1$ حيث n عدد أولي] وكانت له مراسلات مع ديكارت وَفيرما وَباسكال وَديسارغ Desarges وعلماء آخرين[2].

استطاعت الأكاديميات أن تبلور مجموعات النقاش للرجال المتعلمين وبرزت باعتبارها أسلوباً معارضاً للجامعات بروح العصر المدرسي - مع بعض الاستثناءات مثل جامعة ليدن Leiden - ومن ثم لتغذي المواقف القروسطية من أجل تقديم معرفة

1- B.Pascal, Oeuvres (Paris, 1908-14) XII, p.9; XIII,pp.141-55.
2- Informer Mersenne d'une decouverte, c' etait la publier par l'Europe entiere, H.Bosmans (op. cit, p.43).
"كي تخبر مرسيني عن اكتشاف، يعني أن تنشره في كل أرجاء القارة الأوروبية".

ثابتــة، وبالمقابــل عبّــرت الأكاديميــات الجديــدة عــن روح جديــدة في البحــث والاستقصاء، وكما لاحظ كاتب فهي تصوّر:

... لقد شرب العصر الجديد هذا حتى الثمالة، وكان شغله الشاغل استئصال الخرافات البالية محطماً الصور الفضفاضة من تقاليد الماضي، متشبثاً بالآمال الكبيرة للمستقبل، وليعلم هنا أن كل عالم أن يكون مقتنعاً وفخوراً بأنه أضاف قدراً ضئيلاً إلى حصيلة المعرفة وبإيجاز نحكم على تطور العلم الحديث[1].

تأسست أول أكاديمية في نابلس Naples عام 1560 وتبعتها أكاديمية دي لنشي De Lincei في روما عام 1603، ويعود تاريخ جمعية لندن الملكية إلى عام 1662 والأكاديمية الفرنسية للعلوم عام 1666. علماً أن والس كان عضواً دستورياً في الجمعية الملكية وَهويجنز هو الآخر عضواً دستورياً في الأكاديمية الفرنسية.

5

ومن الكتب المهمة التي كتبت في فترة إحياء السلف بعد مرحلة كافاليري هو كتاب والس J.Wallis الموسوم Arithmetica infinitorum [حساب اللانهائيات] في 1655. كان المؤلف من 1643 حتى وفاته 1703 أستاذاً للهندسة في جامعة أكسفورد، ويوضح عنوان الكتاب عزم والس أن يتجاوز كتاب كافاليري Geometria indivisibilium، باعتباره حساباً جديداً (جبراً) ما يطمح إليه والس ليس تطبيق هندسة قديمة، وبهذه الخطوة وسّع والس الجبر إلى تحليل حقيقي - أول رياضياتي يقوم بذلك - فأسلوبه في التعامل مع العمليات اللانهائية غالباً ما كان فجّاً ومع ذلك استطاع أن يتوصل إلى نتائج جديدة؛ حيث أدخل المتسلسلة اللانهائية وجداءات اللانهائية واستخدم بكل جرأة الأعداد التخيلية والأسس الكسرية السالبة، وكتب الرمز ∞ للدلالة عن $\frac{1}{0}$ (وأعلن أن $-1 < \infty$)[2]. واحد من نماذج نتائجه المفكوك الآتي:

1- M.Ornstein, The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century (Chicago, 1913), p.262.

2ـ وردت في النص $-1 > \infty$ المترجم

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8....}{1.3.3.5.5.7.7.9.9...}$$

وكذلك تعبيرات أخرى مشابهة إلى تكاملات بيتا، وكتب تربيعات صغيرة عن التي نعبّر عنها الآن $\frac{4}{\pi}$.

يعتبر والس واحداً من مجموعة عباقرة هذا العصر الذين أثروا الرياضيات باكتشاف تلو الآخر، وإن الحافز المحرك وراء ازدهار هذا العلم الخلاق منذ عصر الإغريق الرائع هو في حد ذاته لا يضاهى، كان جزءاً فقط في كيفية التعامل مع الأساليب الجديدة. كان الكثير من المفكرين العظام في دأب دائم للمزيد: عن "أسلوب عام" - وأحياناً يتم تصورها باتجاه محدد باعتبارها أسلوباً للرياضيات، وحيناً آخر تكون أكثر شمولية باعتبارها طريقة لفهم الطبيعة وخلقاً لإبداعات جديدة. ولهذا السبب نجد في هذه الفترة جميع الفلاسفة المتميزين كانوا رياضياتيين؛ والرياضياتيون بالمقابل كانوا فلاسفة، وهذا البحث عن الابتكارات الجديدة أدى وبصورة مباشرة إلى الاكتشافات الرياضياتية، وخير شاهد على ذلك عمل كريستيان هويجنز الموسوم Horologium Oscillatorium الصادر في 1673. قاده بحثه الدائم عن الساعات (من أجل حل المسألة المعمرة المتعلقة بإيجاد خط الطول عند البحر) ليس إلى الساعات النواسية (البندولية) فحسب، بل إلى دراسة منشأ المنحنيات والتفافها اللولبي لمستوٍ منحنٍ أيضاً.

عاش هويجنز المواطن الهولندي لأسرة مرموقة لسنوات عديدة في باريس، وكان القوة القيادية لأكاديمية العلوم[1] التي تم تأسيسها حديثاً. وَهويجنز هذا فيزيائي مرموق وفلكي، أسس نظرية الضوء الموجية وفسر أيضاً أن لزحل حلقة، وكتابه المتعلق بالساعات النواسية كان له تأثير في نظرية نيوتن للجاذبية، كما يعد كتابه هذا بالإضافة إلى كتاب والس "الحساب" خطوة إلى الأمام في طريق حساب

1- تأسست الأكاديمية الفرنسية من قبل ريشليو Richelieu عام 1635 وكانت وظيفتها الرئيسة هي تأليف قاموس للغة الفرنسية وأعضاؤها الأربعون دائمين (من بينهم علماء تم انتخابهم) وتبعت هذه الأكاديمية أكاديميات اخرى من بينها أكاديمية العلوم Académie des Sciences في عام 1666. وتم الاعتراف بهذه الأكاديميات اثناء الثورة الفرنسية في المعهد الوطني الذي تنتمي إليه أكاديمية العلوم

التفاضل والتكامل أي الفترة التي تسبق نيوتن وَليبنتز. وكانت الأدبيات وكتابا والس وَهويجنز تعج بالاكتشافات الجديدة حول تربيع الدائرة والأغلفة envelopes [هو منحن أو سطح يكون مماساً لكل عضو في أسرة منحنيات أو سطوح].

درس هويجنز المنحى اللوغاريتمي ومنحنى متساوي المماسات ومنحنى السلسلة وبرهن على أن الدويري عبارة عن منحن تاتوكروني tautochronous. ورغم هذه الثروة من النتائج إلا أن معظمها وجد بعدما نشر ليبنتز حسابه للتفاضل والتكامل، ومع هذا كله يبقى هويجنز منتمياً إلى الفترة السابقة لأوانها، ولقد اعترف إلى ليبنتز ذات مرة بأنه لم يتأقلم بعد على طريقة ليبنتز وبالمثل والس لم يكن يشعر يوماً بالاطمئنان تجاه رموز نيوتن، ومع ذلك يعد هويجنز واحداً من كبار رياضياتي القرن السابع عشر الذي أخذ بمسألة الدقة والصرامة بجدية، ومع هذا كانت أساليبه دائماً على النمط الأرخميدسي.

6

تقلبت أنشطة الرياضياتيين في هذه الفترة في مجالات عدة، منها الجديد ومنها القديم وهكذا أثرت الموضوعات الكلاسيكية بالنتائج الأصلية هذا من جانب ومن آخر سلطت ضوءاً جديداً على المجالات العتيقة، ثم خلقت موضوعات جديدة للبحث الرياضياتي، ومثالاً على ذلك دراسات فيرما لديوفانتس وتفسير ديسارغ الجديد للهندسة والنظرية الرياضياتية للاحتمال التي هي في حد ذاتها خلق جديد تماماً.

باتت أعمال ديوفانتس متاحة لعموم قراء اللغة اللاتينية مع عام 1621[1]. ووجدت نسخة فيرما لهذه الترجمة وملاحظاته الهامشية الشهيرة التي قام بنشرها ابنه في عام 1670 وبين طياتها نعثر على "مبرهنة فيرما الرائعة"[2] التي تنص على أنه من المحال إيجاد

1- اولى الترجمات اللاتينية الجاهزة والمتاحة هي: إقليدس 1482 وبطليموس 1515 وأرخميدس 1558 وأبولينوس الأجزاء I-IV 1566 والأجزاء V-VII 1661 وبابوس 1589 وديوفانتس 1621.

2- انظر كتابنا مبرهنة فيرما الأخيرة: "إماطة اللثام عن اقدم معضلة في الرياضيات"، دار التكوين، دمشق 2007 - المترجم.

قيم للأعداد الصحيحة الموجبة x, y, z للمعادلة $x^n + y^n = z^n$ إذا كان $n > 2$. قادت هذه المسألة كومر Kummer في عام 1847 إلى التوصل إلى نظرية حول الأعداد المثالية Ideal.

يبقى البرهان سارياً لكل قيم n، ولكن لم يتم التحقق منه بعد رغم أن المبرهنة صحيحة بالتأكيد لقيم كبيرة[1]. كتب فيرما على الهامش المحاذي لتعبير ديوفانتس 8,II القائل: "هو أن تقسم تربيع عدد إلى تربيعين آخرين" الكلمات الآتية:

> يمكن تقسيم مكعب عدد إلى مكعبين آخرين وعدد أسه أربعة أو إلى أي أس آخر بصورة عامة مهما كان إلى أسين اثنين من الفئة نفسها كما ذكر أعلاه، أما الثانية فهي محالة ولكنني بالطبع وجدت البرهان الرائع لهذا ولكن الهامش صغير جداً ولا يسعه.

وإذا توصل فيرما إلى برهان رائع فعلاً، فإن محاولات ثلاثة قرون من البحث المضني لم يكتب النجاح لبعثه، ولا يسعنا القول سوى أن فيرما العظيم غالباً ما يغفو. ملاحظة هامشية أخرى لفيرما تنص على أن العدد الأولي الذي يأخذ الشكل $4n+1$ يمكن التعبير عنه مرة واحدة فقط باعتباره مجموع مربعين اثنين؛ لقد أثبت آويلر هذه المبرهنة فيما بعد، وتنص "مبرهنة فيرما" الأخرى على أن $a^{p-1} - 1$ تقبل القسمة على p، حيث p هو عدد أولي و a عدد أولي. ظهرت هذه المبرهنة في رسالة لعام ويمكن إثبات المبرهنة بالأساليب الابتدائية. وَفيرما هو أول من أكد في عام 1657 على أن المعادلة $x^2 - Ay^2 = 1$ (A عدد صحيح غير تربيعي) لها عدد غير محدود من الحلول الصحيحة.

يعتبر كل من فيرما وَباسكال هما مؤسسا النظرية الرياضياتية للاحتمالات، وأن الظهور التدريجي حول الاهتمام بالقضايا المرتبطة بالاحتمالات كان نتيجة تطوّر شؤون التأمين، ولكن ثمة مسائل معينة هي التي أثارت قريحة الرياضياتيين العظام في التفكير حول هذه القضايا، والتي جاءت مصادفة بناءً على رغبة أحد النبلاء المقامرين الذين يتخذون من ألعاب الورق وحجر النرد (الزهر) وسيلة للمقامرة. وعلى لسان بواسون:

Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un home du monde, a été l'origine du calcul des probabilités[2]

1- P.Bachman, Der Fermatsche Satz, Berlin, 1919; H.S Vandiver, Amer. Math.Monthly, Vol.53 (1946), pp.555-78; O.Ore, Number Theory and its History, New York, 1948.

2- "اقترحت المسألة المتعلقة بألعاب الحظ من قبل رجل دنيوي إلى لاهوتي متقشف وعلى إثره بدأ حساب الاحتمالات" S.D. Poisson, Recherches sur la probabilités des jugements, Paris,1837,p1

"رجل العالم" هذا الذي تقدم إلى باسكال بسؤال يتعلق بما يطلق عليه "مسألة النقط" problème des points هو شافليه دو مير Chevalier de Méré (سيد ذو معرفة وجاه). بدأ باسكال مراسلاته مع فيرما حول هذه المسألة ومسائل أخرى مرتبطة، وهكذا أسس الرجلان بعض أساسيات نظرية الاحتمالات في عام 1654[1].

سمع هويجنز بهذه المراسلات عندما كان في باريس، ولكنه حاول إيجاد إجاباته الخاصة وبالفعل كانت النتيجة أول أطروحة في الاحتمال عام 1657 تحت عنوان De ratiociniis in ludo aleae. أما الخطوات الأخرى فقد أخذت على عاتق دي ويت De Witt وَهالي Halley اللذين قاما بوضع جداول حول السناهيات لمرتب أو دخل يتلقاه المرء عادة على مدى الحياة] للفترة 1671 و 1693.

بلزيه باسكال هو ابن إتينه باسكال Étienne Pascal مراسل لمرسيني وسمي تباعاً "limaçon Pascal" طوّر بلزيه حفيظته بسرعة تحت إرشاد والده، وعند سن السادسة عشرة توصل إلى المبرهنة التي تحمل اسمه "مبرهنة باسكال" المتعلقة بالشكل السداسي في الدائرة المحوطة [الدائرة التي تمس أضلاع المضلع من الداخل]، ولقد نشرت هذه النتيجة في ورقة واحدة عام 1641 وأفصحت عن تأثير ديسارغ. وبعد سنوات قلائل تمكن باسكال من اختراع الآلة الحاسبة، وعندما بلغ الخامسة والعشرين قرر أن يعيش حياة الزهد والتقشف في مقاطعة بورت رويال ومع ذلك كرّس جل وقته لدراسة العلوم والآداب، وأطروحته عن "المثلث الحسابي" الذي يتألف من معاملات ذات الحدين (الحدّانية) ولكن لم تظهر فائدة إلى الاحتمال إلا بعيد وفاته عام 1664. لقد أسلفنا عن أعمال باسكال حول التكامل وتكهناته عن اللامتناهيات الصغرى التي كان لها الأثر في أعمال ليبنتز، والجدير أيضاً أن باسكال كان أول من قام بصياغة وافية لمبدأ الاستقراء[2].

1ـ انظر كتابنا تاريخ الإحصاء: "الأسس التاريخية والفلسفية للإحصاء والاحتمال" المؤسسة الجامعية، بيروت 2006 ـالمترجم.

2- H.Freudenthal, Archives intern des sciences, Vol. 22 (1953),pp.17-37.

كان غيرا ديسارغ مهندساً معمارياً من مدينة ليون وصاحب كتاب عن المنظور صدر في 1636، وتحتوي كراسته بعنوانها اللافت "Brouillon project d'une atteinte aux évenements des rencontres d'un cone avec un plan (1639)"[1] على لغة نباتية غريبة وبعض المفاهيم الأساسية للهندسة الوصفية مثل نقط عند اللانهائية والالتفافات اللولبية والأقطاب؛ نشرت "مبرهنة ديسارغ" حول المثلثات المنظورية عام 1648 ولم تستخدم هذه الأفكار إلا في القرن التاسع عشر.

٦

لم يكتشف الفهم الكامل للطريقة العامة للتفاضل والتكامل باعتبار أحدهما عملية عكسية للآخر، إلا على يد رجلين أتقنا الأسلوب الهندسي عند الإغريق وعند كافاليري وكذلك الأسلوب الجبري لديكارت وَوالس. ظهر هذان الرجلان بعد عام وفي الواقع ظهرا في شخصيتين عظيمتين هما نيوتن وَليبنتز. ولقد كتب الكثير عن أولوية هذا الاكتشاف ولكن اتضح الآن وضوحاً تاماً أن كلا الرجلين قد توصلا إلى الاكتشاف نفسه بأسلوبهما الخاص وبصورة مستقلة عن الآخر. بداية كان حساب التفاضل والتكامل في جعبة نيوتن (1665-1666 عند نيوتن و 1673-1676 عند ليبنتز) ولكن قام ليبنتز بنشره أولاً (أي نشره في الفترة 1684-1686 وَنيوتن في 1704-1736) ومع ذلك تفوقت مدرسة ليبنتز على مدرسة نيوتن لكونها أكثر ألمعية.

إسحاق نيوتن ابن فلاح ثري من مقاطعة لنكولن بإنجلترا، درس في كمبردج على يد إسحاق بارو الذي منح نيوتن كرسي لوكازين Lucasian للأستاذية عام 1669- حدث أكاديمي رائع واعتراف أستاذ بتلميذه ليكون رئيسه وأرفع مقاماً - ظل نيوتن في كمبردج حتى عام 1696 عندما تبوأ منصب الوصي أو الناظر وفيما بعد الرئيس لدار سك العملات.

يقوم نفوذ نيوتن الهائل أساساً على عمله الموسوم Philosophiae naturalis principia mathematica الصادر في 1687 [المبادئ الرياضياتية للفلسفة الطبيعية] ؛ مجلد ضخم يوطّد

1- "مسودة مقترحة لمحاولة التعامل مع أحداث التقاء مخروط بمستوٍ".

فيه الميكانيك على أساسيات بدهية (أكسيوماتية) ويضم في طياته قانون الجاذبية (الثقالة) القانون الذي يأتي بالتفاحة إلى الأرض ويجعل القمر يدور حول الأرض. يبرهن نيوتن بالاستنتاج الرياضياتي الصارم كيف تأسست قوانين كبلر لحركة الكواكب تجريبياً وتوصل إلى تفسيراتها على ضوء قانون الجاذبية للتربيع العكسي، كما أعطى شرحاً ديناميكياً لمعظم أوجه حركات الأجرام السماوية بالإضافة إلى عمليتي المد والجزر. قام نيوتن بحل مسألة - الجسمين two-body للكرات ووضع البدايات والأساسيات إلى نظرية حركة القمر، وبجانب حلوله هذه لمسألة تجاذب الكرات وضع أسس نظرية الجهد وعن طريق معالجته البدهية افترض أن الزمان والمكان مطلقان.

لم تفصح الأشكال الهندسية للأمثلة التوضيحية بسهوله عن إلمام المؤلف بحساب التفاضل والتكامل، لذا أسماها "نظرية المشتقات الزمنية" theory of fluxions ليعبر هذا المصطلح المتقادم العهد عن معدل التغير rate of change، استخدمه نيوتن للدلالة على دالة المشتق ويرمز له بالرمز $\dot{x}$. اكتشف نيوتن طريقته العامة في الفترة 1665-1666 عندما كان متواجداً في مسقط رأسه هرباً من وباء الطاعون الذي اجتاح مدينة كمبردج، ومنذ ذاك يعود تاريخ أفكاره الأساسية حول التجاذب العام وكذلك قانونه حول بنية الضوء وعلى حد تعبير الأستاذ مور More: "ليس ثمة نماذج أخرى للإنجازات في تاريخ العلوم يمكن مقارنتها مع إنجازات نيوتن لتلك الفترة الذهبية"[(1)].

كان اكتشاف نيوتن "للمشتقات" مرتبطاً بصورة جوهرية بدراسته للمتسلسلات اللانهائية عبر كتاب والس "الحساب"، مما حفزته هذه الدراسة بتوسيع مبرهنة ذات الحدين إلى الأسس السالبة والكسرية، والتي أدت إلى اكتشاف متسلسلة ذات الحدين مما ساعده هذا على تأسيس نظريته المتعلقة بالمشتقات "لكل" الدوال جبرية كانت أم متسامية. يعبر نيوتن عن المشتقة بنقطة توضع فوق الحرف (حروف مثقوبة) قد تمثل قيماً متناهية أو سرعة ما، والحروف الخالية من النقط تمثل المتدفقات fluents.

1- More, Isaac Newton. A Biography (New York, London, 1934), p.41 (Dover reprint, 1962).

لدينا هنا مثال عن الأسلوب الذي شرح فيه نيوتن طريقته للمشتقات الزمنية: يرمز إلى متغيرات المتدفقات بالرموز $v, x, y, z, ...$ والسرعات التي عن طريقها يزداد كل متدفق بتوليد حركته (أطلق عليها مشتقات زمنية أو ببساطة سرعات أو سرعات خفيفة). سوف أمثلها بالحروف نفسها منقطة، فإن $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, ...$ تسمى لا متناهيات صغرى عند نيوتن "لحظات الاشتقاقات" (لحظات التغير المستمر) والتي يرمز لها $\dot{v}\circ, \dot{x}\circ, \dot{y}\circ, \dot{z}\circ$ حيث $\circ$ كمية لا متناهية في الصغر. ويستمر نيوتن في رموزه، إذاً:

فلتكن المعادلة $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = \circ$، نعوض عن x ب $x + \dot{x}\circ$ و y ب $y + \dot{y}\circ$ نحصل إذاً على

$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = \circ$ وما تبقى يقسم على $\circ$ نحصل إذاً على

$$x^3 + 3x^2 \dot{x}\circ + 3x\dot{x}\circ\dot{x}\circ + \dot{x}^3 \circ^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}\circ - a\dot{x}\circ\dot{x}\circ$$
$$+ axy + ay\dot{x}\circ + a\dot{x}\circ\dot{y}\circ + ax\dot{y}\circ - y^3 - 3y^2\dot{y}\circ - 3y\dot{y}\circ\dot{y}\circ - \dot{y}^3\circ^3 = \circ$$

والآن بافتراض أن $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = \circ$ أي تحذف وما تبقى يقسم على $\circ$ نحصل على

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}\circ - a\dot{x}\dot{x}\circ + a\dot{x}\dot{y}\circ$$
$$-3y\dot{y}\dot{y}\circ + \dot{x}^3\circ + \dot{x}^3\circ\circ - \dot{y}^3\circ\circ = \circ$$

وحيث إن الكمية $\circ$ لامتناهية في الصغر فإنها تمثل لحظات الكميات، أي أن الحدود المضروبة بها ستكون عدماً بالنسبة لباقي الحدود، نحصل إذاً على

$$.\ 3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = \circ$$

يوضح لنا هذا المثال أن نيوتن تصور مشتقاته باعتبارها سرعات ولكنها توضح أيضاً أن هناك غموضاً معيناً في أسلوب تعبيره، فهل " $\circ$ " هي أصفار؟ أم لامتناهيات في الصغر؟ أم هي أعداد متناهية؟

حاول نيوتن أن يوضح موقفه بنظرية حول "النسب المطلقة والرئيسة" والتي أدخلها في كتابه "المبادئ" وتتضمن مفهوم النهاية ولكن بأسلوب يصعب فهمه.

تلك النسب المطلقة التي عندها تتلاشى الكميات هي في الواقع ليست نسباً لكميات مطلقة، بل نهايات إزاء نسب لكميات تتناقص دون حدود، وهي تتقارب دائماً وتقترب أكثر فأكثر لأي فرق كان، ولكن لا يمكن تجاوزها ولا الوصول إليها، حتى تتلاشى الكميات في اللانهائية (Principio I, Sect. I last Scholium).

تتقارب الكميات ونسب الكميات في فترة متناهية إلى درجة المساواة وتقترب أكثر فأكثر قبل نهاية تلك الفترة مهما كان الفرق وتتساوى في النهاية (Principio I, Sect. I Lemma I).

يبدو الوضع هنا ضبابياً وبعيداً كل الوضوح وهي الصعوبة بعينها، مما جعل استيعاب نظرية نيوتن للمشتقات عصية إلى حد ما وترتب عن ذلك التباس وانتقادات الأسقف بيركلي Berkeley اللاذعة في 1734، لم يزح سوء الفهم هذا إلا عندما ترسّخ مفهوم النهاية limit الحديث بصورة تامة.

تطرق نيوتن إلى موضوع المخروطيات والمنحنيات التكعيبية المستوية، وعمله الموسوم Enumeratio linearum tertii ordinis لعام 1704 أعطى تصنيفاً للمنحنيات التكعيبية المستوية والتي تصل إلى اثنين وسبعين نوعاً، منطلقاً من مبرهنته التي تقول إنه يمكن الحصول على منحنى تكعيبي من "القطع المكافئ المتباعد" divergent parabola $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بواسطة الإسقاط المركزي من مستوي إلى آخر.

كانت هذه أول نتيجة جديدة مهمة تم التوصل إليها عن طريق تطبيق الجبر والهندسة، لأن الأعمال السابقة كانت مجرد ترجمة أعمال أبولينوس إلى لغة جبرية. إسهام آخر لنيوتن هو طريقته في إيجاد تقريب إلى جذور المعادلات العددية والتي يشرحها المثال التالي: $x^3 - 2x - 5 = 0$ والذي يعطي $x = 2.09455147$.

تكمن الصعوبة في تقويم تأثير نيوتن في معاصريه هو أنه في واقع الأمر كان حريصاً كل الحرص ومتردداً دائماً في نشر اكتشافاته، فمثلاً عندما تفحص جيداً قانون الجاذبية في العام 1665-1666 لم يصرح به إلا عندما قدّم مخطوط الجزء الأكبر من "المبادئ" في عام 1686.

يحتوي عمل نيوتن المعنون Arithmetica universalis على محاضرات في الجبر ألقيت في الفترة 1673-1683 ولم ينشر إلا في 1707، وبالمثل بالنسبة إلى أعماله في المتسلسلات التي يعود تاريخها إلى 1669 صرح عنها في رسالتين إلى أولدنبرغ Oldenburg في 1676 ونشرت في 1699. لم تنشر أعماله حول تربيع المنحنيات لعام 1693 إلا في 1704، وهنا لأول مرة توضع فيه نظرية الاشتقاقات كاملة أمام العالم. أما عمله المبكر Method of Fluxions لم يظهر إلا في 1736 بعد تسع سنوات من وفاته.

8

ولد غوتفرد فلهلم ليبنتز Gottfried Wilhelm Leibniz في مدينة ليبتزغ Leipzig ولكنه قضى جل حياته بالقرب من دار القضاء في مدينه هانوفرHanover لخدمة الدوقات، وأحدهم أصبح ملكاً لإنجلترا تحت اسم جورج الأول George I. كان ليبنتز ذا ميول كاثوليكية أكثر من أي مفكر آخر في عصره، وكانت فلسفته تحتضن التاريخ واللاهوت واللغات والبيولوجيا والجيولوجيا والرياضيات والسياسة وفنون الاختراع، كان أول من اخترع ألآلة الحاسبة بعد باسكال وكانت له تصورات عن الآلات البخارية، كما درس الفلسفة الصينية وحاول المضي قدماً بالوحدة الألمانية.

بحث ليبنتز عن المنهج الشمولي الذي عن طريقه يمكن الحصول على المعرفة والقيام بالاختراعات وفهم الوحدة الجوهرية للكون، وكانت الفترة الأخيرة بمثابة القلب النابض والباعث في حياته، حاول عن طريق العلوم العامة التي شيدها باتجاهاتها المتعددة، قادته في نهاية المطاف إلى اكتشافات في الرياضيات، وإن بحثه عن الخاصية العامة هي الأخرى قادته إلى أفكار مثل التباديل والتوافيق والمنطق الرمزي بالإضافة إلى سعيه إلى لغة كونية يتخاطب البشر عن طريقها، لأن كل أخطاء الفكر هي في واقع الأمر أخطاء حسابية ومن ثم لن تقود إلى المنطق الرمزي فحسب، بل إلى الكثير من إبداعات الرموز الرياضياتية.

يعد ليبنتز واحداً من أعظم مبدعي الرموز الرياضياتية، وقلة من الناس الذين استوعبوا وحدة الشكل والمضمون، ويجب أن يفهم ابتكاره لحساب التفاضل والتكامل باعتباره نقيضاً لهذه الخلفية الفلسفية إن لم يكن نتيجة لبحثه عن اللغة الكونية للتغيير والحركة على وجه التحديد.

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C. D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z — y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z-y+w+x}$ seu dv aequ. dz — dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro — z scribi — dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

صفحة من كتاب حساب التفاضل والتكامل لـ لايبنز

توصل ليبنتز إلى حساب التفاضل والتكامل بين 1673 و 1676 أثناء إقامته في باريس، وكان حينها تحت التأثير الشخصي لهويجنز ودراسته لأعمال ديكارت وَباسكال، ولقد تنبه عن طريق معرفته أن نيوتن أخبر عن طريقته هذه. وبينما كان منحى نيوتن سينمائياً كان منحى ليبنتز هندسياً، وجاء تصوره من "ميزة المثلث" (dx, dy, dz) التي ظهرت كثيراً في كتابات أخرى، أبرزها أعمال باسكال وَإسحاق بارو "محاضرات هندسية" Geometrical Lectures لعام 1670[1].

1- يبدو ان كلمة triangulum characteristicum استخدمها أولاً ليبنتز والتي وجدها اثناء قراءته لباسكال Traite des sinus du quart de cercle وجزءاً من خطاباته (1658). وظهرت ايضاً في سنيلوس "Snellius Tiphys Batavus (1624), pp.22-25.

كان أول إصدار لليبنتز هو نموذج أو صيغة لحساب التفاضل والتكامل في الدورية Acta eruditorum لعام 1684 مكون من ست صفحات، وهي الدورية التي أسسها ليبنتز نفسه في 1682. كان لهذه الورقة عنوان مميز Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas irrationales quantitates morature, et singulare pro illis calculi genus. رغم الغموض إلا أنها تحتوي على رموزنا الحالية dx, dy وقاعدة التفاضل وكذلك $d(uv) = udv + vdu$ وتفاضل خارج القسمة مع الشرط $dy = 0$ للقيم المتطرفة و $d^2y = 0$ لنقط الانعطاف (الانقلاب)، وتبع هذه الورقة واحدة أخرى في 1686 (كتبت على شكل مراجعة كتاب) مع قواعد حساب التكامل والرمز $\int$ [إشارة التكامل] وتم التعبير عن معادلة المنحنى الدويري بالصورة

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

بدأت مع صدور هاتين الورقتين فترة خصبة جداً في الإنتاج الرياضياتي، ووضع ليبنتز يده مع الأخوين برنولي بعد عام اللذين استوعبا وتقبلا بشغف أسلوب ليبنتز. وقبل عام 1700 أعد هؤلاء الرجال كتاباً دراسياً لحساب التفاضل والتكامل للمرحلة الجامعية الأولى، بالإضافة إلى أمور مهمة للمجالات المتقدمة ومن ضمنها حلول لبعض مسائل حساب التغيرات. ظهر أول كتاب دراسي لحساب التفاضل والتكامل يحمل العنوان Analyse des infiniment petits [تحليل اللامتناهيات الصغرى] مع عام 1696 لماركيز دو لاهوبيتال والذي كتب تحت إيحاء يوهان برنولي الذي قام بتعليمه لفترة وجيزة.

كان هذا الكتاب لفترة طويلة هو الوحيد من نوعه ويحتوي أيضاً على "قاعدة لاهوبيتال" حول إيجاد القيمة النهائية - أي نهاية - لكسر كلا حديه يؤولان إلى الصفر. والجدير بالذكر أن رموزنا لحساب التفاضل والتكامل هي من نتاج ليبنتز وحده وحتى لفظتا حساب التفاضل calculus differentialis وحساب التكامل

calculus intergralis هي من وضعه أيضاً. وتحت تأثير ليبنتز استخدمت الإشارة (=) للتساوي و (×) لحاصل الضرب حتى الكلمتان "الدالة" function و "الإحداثيات" coordinates هما من وضعه، وكذلك الكلمة الهزلية "تقبيل" osculating. سميت المتسلسلتان

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

$$\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+..$$

متسلسلتي ليبنتز تيمناً بليبنتز رغم أن أولوية الاكتشاف ليست من نصيبه، ويبدو أنهما تنسبان إلى الرياضياتي جيمس غريغوري الذي ينتمي إلى أسرة اسكتلندية متميزة فكرياً وقضى سنوات عديدة في الخارج (1664-1668) معظمها في بادو Padua، درّس في سانت أندروز باسكتلندا من عام 1668 حتى قبل وفاته بفترة عن عمر ناهز سبعة وثلاثين ربيعاً، رسائله وكتبه الثلاثة التي كتبها عندما كان في إيطاليا، من بينها الذي صدر في 1668 Exercitationes Geometricae يوضّح أصالته الرائعة في التعامل مع العمليات اللانهائية. توصل غريغوري إلى متسلسلة ذات الحدين (1670) وإلى متسلسلة تايلور (1671)، كما يعد من مبتكري حساب التفاضل والتكامل بجانب نيوتن وَليبنتز لو قدر له أن يعيش أكثر.

يعاني شرح ليبنتز لأسس حساب التفاضل والتكامل بعضاً من الغموض كما الوضع مع ليبنتز نفسه، فأحياناً يستخدم dx و dy باعتبارهما كميتين متناهيتين وحيناً آخر كميات أقل من أي كمية محددة وليست صفراً، وظل غياب التعريف الدقيق قدم متشابهات جزئية للإشارة إلى علاقة نصف قطر الأرض إلى مسافة النجوم الثابتة، وهكذا غيّر أسلوب منحاه إلى قضايا تتعلق باللانهائية. وفي إحدى رسائله (إلى فوشر Foucher في 1693) قبل بوجود اللانهائية الفعلية (الحقيقية) كي يتغلب على صعوبات زينو وامتدح غريغوري دو سانت - فنست الذي احتسب المكان الذي تلتقي فيه السلحفاة بأخيل، وكما هو الوضع مع غموض نيوتن الذي استدعى انتقادات بيركلي هو الآخر استدعى

معارضة برنارد نيوفينتيت عمدة مدينة بورميرند بالقرب من أمستردام (1694). كلتا انتقادات بيركلي وَنيوفينتيت لها مبرراتها رغم سلبيتها، لأنها غير قادرة على أن تزود الحساب بالأسس الصارمة والدقيقة، ولكنها تستطيع أن تلهم عملاً بناءً.

الفصل السابع

القرن الثامن عشر

1

تركزت إنتاجية رياضيات القرن الثامن عشر في حساب التفاضل والتكامل وتطبيقاته على الميكانيك، ويمكن ترتيب أعلامه البارزين حسب الصلة ليتبين لنا مدى ارتباطهم الفكري:

ليبنتز Leibniz (1716-1646)

الأخوان برنولي Bernoulli: يعقوب Jacob (1705-1654)

يوهان Johan (1748-1667)

آويلر Euler (1783-1707)

لاكرانج Lagrange (1813-1736)

لابلاس Laplace (1827-1749)

ثمة أنشطة بحثية لها صلة بأعمال هؤلاء الرجال قام بها رياضياتيون فرنسيون أبرزهم كلارو Clairaut وَدالمبر D'Alembert وَموبيرتو Maupertuis بالإضافة إلى صلتهم بفلاسفة عصر التنوير، أضف إلى ذلك الرياضياتيين السويسريين لمبرت Lambert وَدانيال برنولي Daniel Bernoulli.

غالباً ما يكون النشاط البحثي منصباً في الأكاديميات العلمية وتحديداً تلك التي في باريس وبرلين وسانت بطرسبورغ وهي بالطبع الأكثر شهرة رغم أن دور التعليم الجامعي آنذاك جداً ضئيل أو يكاد أن يكون غائباً. إنها الحقبة التي كانت فيها بعض الدول الأوروبية تحت نير الحكم المطلق أو المستبد المستتير:

فريدرك الأكبر وَكاثرين الكبرى، أضف إلى ذلك لويس الخامس عشر وَلويس السادس عشر، وبعض هؤلاء محاطون بحاشية من الرجال المتعلمين.

هذا السرور الشديد أو البهجة بتعبير أدق هي نوع من الإعجاب ملطّفاً ببعض المفاهيم التي لها الدور الفاعل في العلوم الطبيعية والرياضيات التطبيقية في تحسين وتطوير الصناعات من أجل زيادة الكفاءة العسكرية، وكما يقال على وجه الحصر: إن تفوق البحرية الفرنسية كان في الواقع ناجماً عن صناعة السفن والبوارج متماشياً مع ميول هؤلاء الصناع الذي أدى إلى نظريات رياضياتية. كانت أعمال آويلر تطبيقية إلى درجة أهميتها في العسكرية والبحرية، وعلم الفلك من جانب أدى دوراً أساسياً باعتباره الأم المرضعة للأبحاث الرياضياتية تحت حماية السيادة الملكية.

2

كانت بازل Basel المدينة السويسرية ذات السيادة الحرة منذ 1263 مركزاً تعليمياً لردح من الزمن، وفي عهد إيراسموس Erasmus كانت جامعتها مركزاً بارزاً حيث ازدهرت فيها الآداب والعلوم كما هو الوضع في مدن هولندا في ظل حكم التجار النبلاء. ويعود الفضل إلى نبلاء بازل إلى تجار أسرة برنولي القادمة من مدينة آنت فيرب Antwerp مع القرن السابق بعد الغزو الأسباني لها. وفي أواخر القرن السابع عشر وحتى الآن أنتجت هذه الأسرة علماءً في كل جيل، ونادراً ما نجد في تاريخ العلوم أسرة تتمتع بهذا السجل المميز، حيث يبدأ السجل بالرياضياتيين جاكوب (جيمس، جاك) و يوهان (جون، جين) بيرنولي.

درس جاكوب اللاهوت ودرس يوهان الطب، ولكن عندما نشرت أوراق ليبنتز البحثية في الدورية Acta eruditorum تغير مسارهما وقررا أن يصبحا رياضياتيين، وأصبحا بعد ذاك من أوائل تلامذة ليبنتز. في عام 1687 تسلم جاكوب رئاسة قسم الرياضيات بجامعة بازل وظل يدرس فيها حتى وفاته عام 1705. أما يوهان فكان أستاذاً في جامعة غرونجن Groningen عام 1695، وبعيد وفاة أخيه تسلم رئاسة القسم في جامعة بازل وبقي فيها لأكثر من ثلاثة وأربعين عاماً.

بدأ جاكوب مراسلاته مع ليبنتز في 1687 وهكذا استمر تبادل الأفكار بينهما بصورة منتظمة - على الرغم من التنافس الشديد بينهما -. بدأ الأخوان في اكتشاف الكنوز الموجودة في أعمال ليبنتز الرائدة، وكانت قائمة نتائجهما لا تعد ولا تحصى ولا تحتوي فقط على أساسيات حساب التفاضل والتكامل الموجودة في مقرراتنا الدراسية فحسب، بل على تكامل لمعادلات تفاضلية شتى. من بين إسهامات جاكوب هو استخدام الإحداثيات القطبية polar coordinates ودراسة منحنى السلسلة catenary[1] (سبق وأن تناوله هويجنز وآخرون) ومنحنى العروتين (1694) lemniscate[2] والحلزون اللوغاريتمي logarithmic spiral[3]. في عام 1690 توصل ليبنتز إلى ما يسمى متساوي الزمن isochrone[4] والذي اقترحه في 1687 باعتباره منحنى عندما يسقط جسم بسرعة منتظمة، ويبدو هذا هو قطع مكافئ شبه تكعيبي semi-cubic parabola، كما تناول جاكوب أيضاً الأشكال متساوية المحيطات isoperimetric (1701) والتي أدت إلى حساب التغييرات calculus of variations.

والجدير بالذكر أن الحلزون اللوغاريتمي قادر على إعادة إنتاج نفسه في ظل تحويلات مختلفة (ومنشأه هو حلزون لوغاريتمي وبالمثل لكلا المنحنى الدّواسي pedal والكاوي caustic بدلالة القطب). كل هذه الأشياء كانت متعة وبهجة بالنسبة لجاكوب لدرجة أنه كان يرغب في نقش هذا المنحنى على شاهد قبره والعبارة التالية أيضاً: eadem mutate resurgo[5].

1- منحنى السلسلة: هو المنحنى الذي تأخذه سلسلة منتظمة إذا أغلقت من طرفيها تعليقاً حراً.

2- منحنى العروتين: منحنى مستوٍ مغلق مكون من عروتين متناظرتين تلتقيان عند عقدة وصيغته: $(X^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ حيث a أكبر مسافة بين المنحنى ونقطة الأصل، ومعادلته القطبية $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ إذا اعتبرت العقدة عند نقطة الأصل

3- حلزون لوغاريتمي: هو الحلزون الذي تكون فيه الزاوية بين المتجه الشعاعي والمحور القطبي متناسبة مع لوغاريتم طول هذا المتجه بحيث تكون معادلته القطبية $\log r = a\theta$ (المترجم، انظر معجم الرياضيات ـ أكاديميا).

4- متساوي الزمن/الديمومة أو ثابت الدورة الزمنية: متكرر في فترات منتظمة (المترجم).

5- "إنني أبدو للعيان كما أنا على الرغم من تغيري" والحلزون الموجود على قبره شبيه بحلزون أرخميدس

كان جاكوب برنولي من أوائل طلاب نظرية الاحتمالات وهو صاحب كتاب Ars conjectandi "فن التخمين" الصادر بعيد وفاته عام 1713. يحتوي الجزء الأول من الكتاب على آثار هويجنز حول ألعاب الصدف، بينما يعالج الجزء الآخر مسألتي التوافيق والتباديل متوجاً "بمبرهنة برنولي" حول توزيع ذات الحدين (الحدانية)، كما تبرز أيضاً أعداد برنولي عند مناقشته مثلث باسكال.

3

كانت محاولات يوهان برنولي ذات صلة بأخيه الأكبر جاكوب، ودائماً ما يصعب أن نفرّق بين نتائج عمل هذين الرجلين، وغالباً ما كان يعتبر يوهان هو مبتكر حساب التغيرات وذلك بسبب إسهامه في مسألة الزمن الأقصر brachystochrone، والتي تمثل بمنحنى متسارع التحدر لجسيم (نقطة) مادية تتحرك بين نقطتين في مجال الجاذبية. تناول ليبنتز دراسة هذا المنحنى وكذلك الأخوان برنولي في 1697 وما بعدها وتوصلا إلى معادلة المتقاصر (الجيودسي) geodesic على سطح معين[1] [أقصر خط بين نقطتين على سطح معين] وكان الجواب عن مسألة الزمن الأقصر هو الدّويري cycloid [خط منحنٍ تحدثه نقطة على محيط كرة (دائرة) تتدحرج على سطح مستوٍ]، باستطاعة هذا المنحنى حل مسألة الزمن عينه وهو المنحنى الذي تصل فيه نقطة مادية في مجال الجاذبية (الثقالة) أقل ما يمكن في زمن مستقل عن نقطة بدايتها. وإن الذي اكتشف خاصية الدّويري هو هويجنز واستخدمها في تشييد بندول (نواس) ساعات الزمن عام 1673 حيث لا ترتبط الفترة بالسعة.

ومن بين هؤلاء الذين لهم تأثير في مسيرة الرياضيات من أسرة برنولي هم نيكولوس Nicolaus وَدانيال Daniel أبناء يوهان. دعي نيكولوس إلى سانت بطرسبيرغ التي أسسها القيصر بيتر الأكبر قبل سنوات قلائل وظل فيها لفترة

1- سبق وان تطرق نيوتن في احد فصول "المبادئ" (II,Prop.35) إلى دوران المجسم في سائل بأقل مقاومة، لم يعطِ إثباتاً إلى قناعاته هذه.

قصيرة أقترح خلالها مسألة في نظرية الاحتمالات عرفت "مسألة سانت بطرسبيرغ" (أو على وجه التحديد "المفارقة"). توفي نيكولوس في سن مبكرة أما دانيال فظل على قيد الحياة لأمد طويل، وحتى عام 1777 كان أستاذاً في جامعة بازل. كانت لدانيال اهتمامات وأنشطة متنوعة تركزت حول علم الفلك والفيزياء وديناميك الموائع. يعتبر كتابه Hydrodynamica "ديناميك الموائع" الصادر في 1738 والذي يحتوي على مبرهناته التي تحمل اسمه حول الضغط الهيدروليكي، كما يضم الكتاب بين طياته أسس النظرية الحركية للغازات، وبمشاركة دالمبر وآويلر درس نظرية اهتزاز الأوتار، وفي الوقت الذي طوّر والده وعمه نظرية المعادلات التفاضلية العادية إلا أن دانيال يعد رائداً للمعادلات للتفاضلية الجزئية.

4

قدمت لنا بازل أيضاً رياضياتياً من أكثر إنتاجية القرن الثامن عشر - إن لم يكن على مر العصور - حيث تعلم والده على يد جاكوب برنولي وتعلم الابن على يد يوهان أنه آويلر، وعندما غادر نيكولاس ابن يوهان إلى سانت بطرسبيرغ عام 1725 رافقه آويلر الشاب وظل في الأكاديمية حتى 1741. كان آويلر في الفترة من 1741 إلى 1766 في أكاديمية برلين تحت رعاية خاصة من فريدريك الأكبر وعاد مرة أخرى إلى سانت بطرسبيرغ من 1766 إلى 1783، ولكن هذه المرة كانت تحت رعاية الإمبراطورة كاثرين.

تزوج آويلر مرتين وأنجب منهما ثلاثة عشر طفلاً، أما حياة هذا الأكاديمي فقد تكللت حصراً بالعمل في مجالات شتى في الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية، وعلى الرغم من فقدان بصره، حيث فقد عينه الأولى في 1735 والأخرى عام 1766 إلا أن ذلك لم يعرقل إنتاجيته الهائلة. كان آويلر الأعمى دوماً مسترشداً بذاكرته الاستثنائية تملي عليه اكتشافاته بصورة مستمرة. نشر آويلر أثناء حياته 530 كتاباً وورقة بحثية وبعد وفاته ترك مخطوطات كثيرة، حيث قامت أكاديمية سانت بطرسبيرغ بطباعتها على مدى سبعة وأربعين عاماً (وهذا ما جعل حصيلة

أعماله تفوق 771 عملاً، إلا أن غوستاف إنستروم G.Eneström جردها بالتمام إلى 886 عملاً).

قدم أويلر إسهامات بارزة في كل مجالات الرياضيات القائمة في عصره، حيث قام بنشر نتائجه ليس على صورة أوراق بحثية متنوعة فحسب، بل على هيئة عدد من الكتب الدراسية ذات التأثير الجيد والتي هي بمثابة ترتيب واختزال ما تم جمعه وحصره على مدى العصور، ولكن يبقى عرض أويلر دائماً في صورته النهائية، فمثلاً حساب المثلثات الذي نعرفه اليوم بمفاهيمه عن القيم المثلثاتية باعتبارها نسباً، وكذلك رموزه الفعالة التي يعود تاريخها منذ صدور عمله الموسوم "مقدمة في تحليل اللانهائيات" Introductio in analysin infinitorum عام 1748. إن الاعتبار العظيم لكتبه الدراسية ظل إلى الأبد موضع تقدير حول قضايا الرموز في الجبر وحساب التفاضل والتكامل، مما دفع كلاً من لاكرانج ولابلاس وغاوس أن يأخذوا بأعمال أويلر برمتها.

يغطي كتاب "المقدمة" لعام 1748 في جزأيه موضوعات كثيرة ومتنوعة، حيث يحتوي على دراسة للمتسلسلة اللانهائية التي تتضمن e^x و $\sin x$ و $\cos x$ وتقدم العلاقة $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (التي سبق وأن اكتشفها يوهان برنولي وآخرون في صور مختلفة). أما بالنسبة للمنحنيات والسطوح هي الأخرى تم تناولها على ضوء معادلتها، لذا فإنه يمكن اعتبار "المقدمة" أول كتاب دراسي عن الهندسة التحليلية.

نجد أيضاً في هذا الكتاب نظرية جبرية للحذف[1]، كما نجد أجزاءً أكثر إثارة هو الفصل المتعلق بدالة زيتا zeta function[2] وعلاقتها بنظرية الأعداد الأولية، وفصل آخر حول partitio numerotum لتقسيم الأعداد[3].

1- إبعاد متغير أو اكثر في منظومة المعادلات الآنية باستخدام عمليات أولية للحصول على منظومة أخرى ذات العدد نفسه من المعادلات أو اقل منه، بحيث تختفي تلك المتغيرات في المنظومة الجديدة - المترجم

2- هي الدالة التي تأخذ الشكل $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

3- انظر تمهيد "المقدمة" الذي كتبه A.Speiser: Euler, Opera omnia, 1st ser., Vol.9 (1945)

هناك كتاب دراسي آخر رائع وعميق هو كتاب آويلر الموسوم Institutiones calculi differentials [تأسيس حساب التفاضل] الصادر في عام 1755 وتبعه ثلاثة أجزاء معنونة Institutiones calculi integralis [تأسيس حساب التكامل] في الفترة 1768-1774 وهنا لا نجد حساب التفاضل والتكامل الابتدائي فحسب، بل نظرية المعادلات التفاضلية ومبرهنة تايلور Taylor وتطبيقاتها المتعددة وصيغة آويلر للجمع وتكاملات آويلر لبيتا وغاما. أما الجزء المتعلق بالمعادلات التفاضلية وتمايزه عن المعادلات "الخطية" و "المحددة" و "المتجانسة" لا يزال أنموذجاً لمقرراتنا الابتدائية حول هذا الموضوع.

يعتبر كتاب آويلر Mechanica, sive motus scientia analytice exposita الصادر في 1736 أول مقرر دراسي يقدم ديناميك نيوتن لنقطة مادية ويتم تطويرها بالأساليب التحليلية. وتبعه كتاب آخر Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum صدر في 1765 من حيث عالج فيه ميكانيك الأجسام الصلبة بالأساليب التحليلية نفسها، كما احتوى على معادلات آويلر لجسم يدور حول نقطة.

أما كتاب آويلر الموسوم Vollständige Anleitung zur Algebra [المرشد الكامل للجبر] لعام 1770 فقد كتب بالألمانية بواسطة خادمه الذي كان يملي عليه آويلر آنذاك لأنه غدا فاقد البصر تماماً، ومع ذلك يعد هذا الكتاب نموذجاً للكثير من الكتب الدراسية في الجبر. ويقودنا هذا الكتاب إلى نظرية المعادلات التكعيبية والتربيعانية [ثنائية التربيع]، ثم ينهي كتابه بفصل حول المعادلات غير المحددة، من حيث نجد استحالة برهان المعادلة $x^n + y^n = z^n$ للأعداد الصحيحة x, y, z عندما تكون $n = 3$ و $n = 4$.

وفي عام 1744 ظهر عمل آويلر الموسوم Methodu inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes والذي يعتبر أول تحقيق ودراسة لحساب التغيرات، حيث يحتوي على "معادلات آويلر" وتطبيقاتها المتعددة ومن ضمنها الاكتشاف المتعلق حول كون السطح السلسلي الشكل والمجسم اللولبي القائم هي سطوح أصغريه[1]. والكثير من نتائج آويلر الأخرى موجودة في أوراقه البحثية الصغيرة التي تحمل في طياتها العديد من الجواهر النادرة وقليل منها معروف حتى الآن.

1- سطح سلسلي الشكل catenoid: هو سطح هندسي ناتج عن دوران منحنى السلسلة حول محور تناظره المجسم اللولبي helicoid: جسم أو سطح يأخذ شكلاً لولبياً.

أحد الاكتشافات المعروفة الآن هي تلك المتعلقة بالمبرهنة التي تربط عدد رؤوس V وحواف (حدّ) E ووجوه F متعدد سطوح مقفل والذي يعبر عنه بالعلاقة: $V+F-E=2$ [1]؛ وخط آويلر في المثلث؛ والمنحنيات ذات السمك الثابت (أطلق عليها آويلر المنحنيات ذات الشكل المداري orbiform) وثابت آويلر الذي يمكن التعبير عنه بالآتي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.577216$$

هناك أيضاً أوراق بحثية أخرى تتعلق بالمتسليات الرياضياتية (منها جسور كونكسبيرغ السبعة وقفزة الفارس في الشطرنج). تعد إسهامات آويلر في نظرية الأعداد وحدها إلى درجة أن يطلق عليه مشكاة في رواق شهير [إمام المشاهير] حيث نجد من اكتشافاته في هذا الحقل قانون التعاكس التربيعي للبواقي.

103–104] DE QUANTITATIBUS TRANSCENDENTIBUS EX CIRCULO ORTIS 147

Secantes autem et cosecantes ex tangentibus per solam subtractionem inveniuntur; est enim

$$\text{cosec. } s = \text{cot. } \frac{1}{2}s - \text{cot. } s$$

et hinc

$$\text{sec. } s = \text{cot.}\left(45^\circ - \frac{1}{2}s\right) - \text{tang. } s.$$

Ex his ergo luculenter perspicitur, quomodo canones sinuum construi potuerint.

138. Ponatur denuo in formulis § 133 arcus s infinite parvus et sit n numerus infinite magnus i, ut is obtineat valorem finitum v. Erit ergo $ns = v$ et $s = \frac{v}{i}$, unde sin. $s = \frac{v}{i}$ et cos. $s = 1$; his substitutis fit

$$\text{cos. } v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

atque

$$\text{sin. } v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

In capite autem praecedente vidimus esse

$$\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$$

denotante e basin logarithmorum hyperbolicorum; scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit

$$\text{cos. } v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

et

$$\text{sin. } v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ex quibus intelligitur, quomodo quantitates exponentiales imaginariae ad sinus et cosinus arcuum realium reducantur.[1] Erit vero

1) Has celeberrimas formulas, quas ab inventore *Formulas Eulerianas* nominare solemus, Eulerus distincte primum exposuit in Commentatione 61 (indicis Enestroemiani): *De summis*

صفحة من كتاب المقدمة لـ أويلر

1- لقد كان معلوماً لديكارت، Oeuvres (C.Adam and P.Tannery,Eds), pp.257-76.

كان نشاط آويلر منصباً أكثر على علم الفلك، حيث هناك النظرية القمرية وهي ذات أهمية. قسم منها لمسألة الجسم - الثلاثي والقسم الآخر حول إيجاد الحلول لمسألة خط الطول واللتين أخذتا جلّ اهتمامه. في عام 1774 صدر عمله Theoria motus وهو عبارة عن بحث تناول فيه ميكانيك الأجرام السماوية بالإضافة إلى عمل آخر مرتبط به وهو دراسة تجاذب المجسمات الإهليليجية نشر في 1738.

148 TOMI PRIMI CAPUT VIII § 138—140 [104—105

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1}\cdot\sin. v$$

et

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1}\cdot\sin. v.$$

139. Sit iam in iisdem formulis § 138 n numerus infinite parvus seu $n = \frac{1}{i}$ existente i numero infinite magno; erit

$$\cos. nz = \cos. \frac{z}{i} = 1 \quad \text{et} \quad \sin. nz = \sin. \frac{z}{i} = \frac{z}{i};$$

arcus enim evanescentis $\frac{z}{i}$ sinus est ipsi aequalis, cosinus vero $= 1$. His positis habebitur

$$1 = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^{\frac{1}{i}} + (\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2}$$

et

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^{\frac{1}{i}} - (\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Sumendis autem logarithmis hyperbolicis supra (§ 125) ostendimus esse

$$l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i \quad \text{seu} \quad y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}ly$$

posito y loco $1+x$. Nunc igitur posito loco y partim $\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z$ partim $\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z$ prodibit

---

serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum, Miscellanea Berolin. 7, 1743, p. 172; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 14. Iam antea quidem cum amico CHR. GOLDBACH (1690—1764) formulas huc pertinentes, partim speciales partim generaliores, communicaverat. Sic in epistola d. 9. Dec. 1741 scripta invenitur haec formula

$$\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \text{Cos. Arc. } l2$$

et in epistola d. 8. Maii 1742 scripta haec

$$a^{p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2 \text{ Cos. Arc. } pla.$$

Vide *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 110 et 123; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series III. Confer etiam Commentationem 170 nota 1 p. 35 laudatam, imprimis § 90 et 91. A. K.

صفحة من كتاب المقدمة لـ أويلر

كتب آويلر كتباً حول الهيدروليك وصناعة السفن والمدفعية، وفي الفترة 1769-1771 ظهرت ثلاثة مجلدات عن الانكساريات Dioptrical: فرع من البصريات يبحث في انكسار الضوء؛ مع نظرية تتعلق بمرور الأشعة عبر منظومة من العدسات. وفي عام 1739 ظهرت نظريته الجديدة في الموسيقا التي تزعم أن هناك الكثير من الأمور الموسيقية للرياضياتيين وبالمثل هناك الكثير من الأمور الرياضياتية للموسيقيين. وتبقى هناك دراسات آويلر الفلسفية المتعلقة بأهم قضايا العلوم الطبيعية والتي لخصها في مجموعة من الرسائل حملت العنوان

"رسائل إلى أميرة ألمانية" صدرت في 1760-1761 وظلت نموذجاً في متناول مدارك عموم الناس.

لقد كان إنتاج آويلر خصباً وغزيراً ومنهلاً لا ينضب وقد يفاجأ المرء بالدهشة والاستغراب عندما يحاول أن يدرس أعماله، ولكن الإبحار في أعماله ليس بالأمر العسير كما يبدو، لأن لغته اللاتينية بسيطة جداً ورموزه حديثة، بل يمكن القول إن رموزنا التي نتداولها الآن تعود إلى آويلر وحده! ولا تزال هناك قائمة طويلة تحتويها اكتشافات آويلر، وهناك من الأفكار التي لا يمكن تحاشي الغوص فيها. وكبار علماء الرياضيات يجلون دائماً التقدير والاحترام إلى آويلر "أقرؤوا آويلر" هكذا كان يقول لابلاس إلى الرياضياتيين الشبان ويضيف "أقرؤوا آويلر إنه أستاذ الجميع "lisez Euler, c' est notre maître `a touus". أو كما يقول غاوس "إن دراسة أعمال آويلر ستظل أفضل مدرسة لمختلف مجالات الرياضيات وليس هناك بديل آخر"، ورَيمان من جانب درس أعمال آويلر بعمق وتأنٍ ومعظم كتاباته العميقة تنبض بروح آويلرية، ولكن قد يسيء الناشرون والشرّاح المحدثين إلى ترجمات بعض أعمال آويلر.

5

إنها نقطة إيجابية وبناءة ألا نشير إلى إسهامات آويلر في العلوم فحسب، بل إلى مواطن الضعف عنده، فمثلاً العمليات اللانهائية كانت ولا زالت تؤخذ بصورة غير جدية في القرن الثامن عشر، ومعظم أعمال كبار الرياضياتيين آنذاك تثير فينا الحماس للمحاولة والتجريب، فثمة محاولات تتعلق بالمتسلسلات اللانهائية والجداءات اللانهائية والتكاملات واستخدام رموز مثل 0 و ∞ و $\sqrt{-1}$. فإذا أخذنا بنتائج آويلر فهناك اهتمامات أخرى لدينا عليها تحفظات، فعلى سبيل المثال، نحن نقبل بنصوص آويلر حول لوغريتم n $(\log n)$ لكونه يتمتع بقيم لانهائية وجميعها أعداد عقدية باستثناء عندما يكون n موجباً وأحد القيم حقيقية. لقد توصل آويلر إلى هذه النتيجة في رسالة خطها إلى دالمبر D'Alembert عام 1747، حيث صرح أن $1-3+5-7+...=0$ أو عندما استنتج من العلاقات الآتية:

$$n+n^2+\ldots=\frac{n}{1-n}$$

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{n}{n-1}$$

$$\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+\ldots=0$$

ولكن يجب التريث وأخذ الحيطة وعدم التسرع في انتقاد آويلر في أسلوبه حول التلاعب بالمتسلسلات التباعدية divergent، وبكل بساطة فهو ليس دائماً يستخدم اختباراتنا الحالية للتباعدية والتقاربية كقياس لصلاحية متسلسلاته. إن معظم أعمال آويلر المتعلقة بالمتسلسلات والتي كان يفترض أنها مشوشة قد تم حسمها بصورة قطعية وصارمة من وجهة نظر الرياضياتيين المحدثين[1].

ليس بوسعنا على أي حال أن نتحمس إلى أسلوب آويلر حول تأسيس حساب التفاضل والتكامل على إدخال الأصفار على هيئة رتب مختلفة. لقد عبّر آويلر في كتابه Differential Calculus "الحساب التفاضلي" لعام 1755 عن الكميات اللامتناهية الصغر بأنها كميات فعلاً تساوي صفراً

$a\sqrt{dx}+Cdx=a\sqrt{dx}$ و $dx\pm(dx)^{n+1}=dx$ و $a\pm ndx=a$ [2]

إذاً توجد هناك رتب لانهائية من الكميات اللامتناهية في الصغر وإن جميعها يساوي صفراً. ولكن يجب أن نفرق بعضها عن بعض إذا نظرنا إلى علاقاتها المتبادلة التي يمكن تفسيرها بالنسب الهندسية[3].

1- "يجب الا نتحدث - كما هو معمول به، ولا سيما مع نهاية القرن التاسع عشر - عن عيوب الدقة عندما نتعامل مع أساليب الرياضياتيين السابقين، فإنه يمكن التعامل معها بأسلوب مرض مع الأخذ بالحسبان الأساليب التي اكتسبنها على مر العصور. يجب أن نتحدث عن عيوب الدقة فقط عندما يتم الحصول على بعض النتائج عن طريق التفكر الذي لا يمكن ان يدعم منطقياً". (مقدمة إلى كتاب أويلر Opera omnia، تحرير C.Caratheodory,ed 1st,ser, Vol.24-1952,p.xvi.

2- تذكرنا هذه الصيغة بالعبارة المنسوبة إلى زينو Zeno على لسان سمبلسوس Simplicius تلك الكمية التي إذا اضيفت إلى كمية اخرى أو إذا اخذت منها كمية تبقى هي إياها لا تزيد ولا تنقص فهي لا شيء.

3- Euler,Opera Omnia, 1st ser.Vol.10,p.72، إن انطباع معظم الرياضياتيين - ولا يزال هو - حتى أويلر الطيب عادة ما يغفو. اشار الأستاذ جوسفيك A.P. Juškevič من عهد قريب ان هناك جوانب أخرى للقضية:

Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis, in Euler Sammelband zum 250. Geburtstages (Berlin,1959), pp.224-44.

ويبقى السؤال العام حول أسس حساب التفاضل والتكامل موضوع خلاف وكذلك الأسئلة المتعلقة حول العمليات اللانهائية. تم استدعاء الحقبة الصوفية حول أسس حساب التفاضل والتكامل (على حد تعبير كارل ماركس) والصوفية نفسها التي غالباً ما تغدو أبعد من المؤسسين الأوائل، فمن المعروف إ ن أستاذ وكاهن بيزا Pisa غويدو غراندي G. Grandi في دراساته حول الورديات $(r = \sin\theta)$ والمنحنيات الأخرى التي تشبه الأزهار قد اعتبر الصيغة الآتية رمزاً للخلق من العدم:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...$$

$$\frac{1}{2} = (1-1) + (1-1) + (1-1) + ..$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0$$

توصل غراندي إلى نتيجة مفادها أن $\frac{1}{2}$ يمكن اعتباره حالة من حالات تركة الأب الذي يوصي بالجوهرة إلى ولديه الاثنين، بحيث كل واحد منهما يحتفظ بالحلية لمدة عام على التناوب، لذا فلكل واحد منهما نصفها.

قد تكون أسس حساب التفاضل والتكامل عند آويلر يشوبها نوع من الضعف، ولكن يمكن أن يقال إنه عبّر عن وجهة نظره بكل وضوح ودون أي غموض. حاول دالمبر في بعض مقالات الموسوعية إيجاد هذه الأسس بوسائل أخرى. نيوتن من جانب استخدم مصطلح "النسبة المطلقة والأولي" للتعبير عن "المشتق الزمني" fluxion ليعبّر عن معدل التغير ويرمز له x ، أي من أجل المشتق) باعتباره أول أو آخر نسبة لكميتين خرجتا تواً إلى الوجود. استبدل دالمبر هذا المفهوم بمفهوم "النهاية" limit حيث قال إن الكمية الواحدة هي نهاية لكمية أخرى عندما تقترب الثانية إلى الأولى أقرب من أي كمية معطاة. "وبكل بساطة تحتوي مفاضلة المعدلات على إيجاد النهايات لنسب الفروق المتناهية لمتغيرين متضمنين في المعادلة" (انظر القسم 7 من هذا الفصل). تعتبر هذه خطوة متقدمة ورائعة كما هو الوضع مع تصور دالمبر بالنسبة إلى رتب اللانهائيات المختلفة.

وعلى أي حال، لم يكن معاصرو دالمبر مقتنعين بسهولة بأهمية هذه الخطوة الجديدة، وتحديداً عندما قال إن القاطع secant لدالة مثلثاتية لزاوية وهو مقلوب

جيب التمام cosine] يصبح ظلاً tangent عندما تكون نقطتا التقاطع واحدة، حينها استشعر من الأمر بأنه لم يتغلب بعد على الصعوبات المتأصلة في مفارقات زينو، وبعد كل هذا، فهل الكمية المتغيرة تؤول إلى نهاية؟ أو لا تؤول إطلاقاً؟

ذكرنا آنفاً انتقادات القديس بيركلي الموجهة إلى مشتقات نيوتن. كان جورج بيركلي G. Berkeley في عام 1724 عميداً لديري Derry وأسقفاً لكولين Cloyne بجنوب إيرلندا عام 1734 - وأقام في الفترة من 1729 إلى 1731 في نيوبورت Newport - والمعروف عن بيركلي بتطرفاته المثالية (esse est percipi). امتعض بيركلي من الدعم والتأييد الذي قدمه العلم النيوتني [نسبة إلى نيوتن] إلى المادية ثم هاجم بشدة نظرية الاشتقاق في الدورية The Analyst لعام 1734، وسخر تماماً من اللامتناهيات في الصغر معتبراً إياها "أشباحاً لكميات ميتة" فإذا زاد المتغير x بمقدار o فإن الزيادة في x^n تقسم على o وتصبح

$$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} o + \ldots$$

هذا مع افتراض أن o يختلف عن الصفر، وأن اشتقاق x^n و nx^{n-1} يمكن الحصول عليهما بمساواة o بالصفر، عندما تبدّل الفرضية فجأة، أي عندما تختلف o عن الصفر. وهذا في حد ذاته "بيان الصوفية" الذي اكتشفه بيركلي في حساب التفاضل والتكامل واعتقد عن طريقه أنه تم الحصول على نتائجها الصحيحة بالتعويض عن الأخطاء، ولذا فإن المشتقات لا يمكن الاعتماد عليها منطقياً. "من ذا الذي يستوعب المشتقة الثانية أو الثالثة أو الفرق بين الثانية والثالثة"، هكذا كان بيركلي يعبر عن استغرابه من "الحاد الرياضياتي" الذي يوجه له التهم (أنه هالي Hally)، ويضيف: "يخيّل لي أنه ليس بحاجة أن يكون موسوساً حول أي أمرٍ من أمور اللاهوت". لم تكن هذه الحالة الوحيدة التي استخدمت لتعزيز صعوبة الفلسفة المثالية الحاسمة.

حاول الرياضياتي البريطاني جون لاندن J. Landen ذو التعليم الذاتي والمحتفظ اسمه في نظرية التكاملات الإهليليجية أن يتغلب على الصعوبات الأساسية في حساب التفاضل والتكامل بأسلوبه الخاص. واجه لاندن انتقادات بيركلي في (1764) Residual Analysis المتعلقة بتجنب اللامتناهيات في الصغر

واقترح أنه يمكن الحصول على مشتقة x^3 على سبيل المثال بتغير x إلى x_1 حيث

$$\frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1^2 + xx_1 + x^2$$

وتصبح $3x^2$ عندما $x = x_1$. تحتوي هذه العملية على متسلسلة لانهائية عندما تكون الدوال أكثر تعقيداً، ويمكن اعتبار أسلوب لاندن ذا صلة فيما بعد بالأسلوب الجبري عند لاكرانج.

6

كان آويلر رياضياتياً رائداً دون منازع لتلك الفترة، إلا أن فرنسا واصلت عطاءها في إنتاج أعمال ذات أصالة، من هنا وأكثر من أي بلد آخر تم تصور الرياضيات باعتبارها العلم الذي سيجلب إلى نظرية نيوتن القدر الأكبر من الدقة. كانت نظرية الجذب العام له اهتمامات عظيمة في أوساط فلاسفة عصر التنوير الذين استخدموها سلاحاً في نضالهم ضد رواسب وآثار الإقطاعية.

في عام 1664 وضعت الكنيسة الكاثوليكية مؤلفات ديكارت على قائمة الممنوعات، ولكن مع عام 1700 أصبحت نظرياته سائدة حتى في الأوساط المحافظة. وهكذا غدت القضية النيوتنية مرادفة للديكارتية وموضوعاً ساخناً في الساحة لفترة ليس في الأوساط المثقفة فحسب بل حتى بين رجال القاعات[1]. حاول فولتير في رائعته Letters sur les Anglais المنشورة عام 1734 تقديم نيوتن إلى عامة القراء الفرنسيين، كما ترجم شاتليه Mme.du Chateler زميل فولتير "المبادئ" إلى الفرنسية في عام 1759.

كان الفصل الحاسم في الإقناع عند المدرسيين هو الشكل الهندسي للأرض، أما عن نشأة الكون فهو الموضوع المفضل عند الديكارتيين باعتبار أن

1ـ القاعة الأدبية: اجتماع ادباء وفنانين او سياسيين بارزين يعقد دورياً في قصر رجل (او امراة) من ذوي الشأن، المورد ـ البعلبكي

الأرض ممدودة عند القطبين، بينما تزعم نظرية نيوتن الانبساط التام فحسب. قام الفلكيان الديكارتيان (كاسيني: جين دومنيك J. Dominique الأب ومعروف في الهندسة "بيضاويات كاسيني"، 1680 وَجاك Jacques الابن) بقياس قوس دائرة خط الزوال (الهاجرة) في فرنسا في الفترة من 1700 إلى 1720، ومنها بررا الاستنتاج الديكارتي، وهو الخلاف الذي طالما يبرز عند أكثر الرياضياتيين.

في عام 1735 تم إرسال بعثة إلى البيرو وتبعتها أخرى إلى تورنيا Tornea في الفترة 1736-1737 بقيادة بير دو موبيرتيه Pierre de Maupertuis مزودة بمختبر لقياس درجة خط الطول، وكانت نتائج كلتا البعثتين انتصاراً لنظرية نيوتن وَلموبيرتيه نفسه. والمعروف الآن aplatisseur grand مسوّي الأرض الكبير وأصبح رئيساً لأكاديمية برلين وكان لسنوات ينعم بسمعته في بلاط فريدرك الأكبر، وانتهى كل شيء عندما نشب خلاف حاد مع الرياضياتي السويدي صمويل كونغ S.König حول مفهوم الفعل الأقل في الميكانيك الذي ربما أشارت إليه أعمال ليبنتز.

كانت تطلعات موبيرتيه وكما هو الحال مع فيرما وَآينشتاين فيما بعد هي توحيد قوانين الكون - أي البحث عن قوانين توحد الكون. لم تكن صياغة موبيرتيه واضحة ولكنه عرف "الفعل" بالكمية *mvs* (حيث m هي الكتلة و v السرعة و s المسافة) وضمه إلى برهان حول وجود الله. وبلغ الخلاف أشده عندما هجا فولتير الرئيس الشقي في عمله Diatribe du docteur Akakia, Médecin du pape لعام 1725، لا دعم الملك ولا دفاع آويلر تمكنا من إسعاف موبيرتيه الغريق، ولكن الرياضياتي المنطوي مات بعد فترة وجيزة في بازل موطن أسرة برنولي.

لقد أعاد آويلر منطوق الفعل الأقل بحيث يأخذ الشكل $\int mvds$ ويجب أن يكون الحد الأدنى، وفضلاً عن ذلك فهو لم ينغمس في ميتافيزيقية موبيرتيه، مما جعل المفهوم يقف على قاعدة صلبة كان له صداه في أعمال لاكرانج[1] وَهملتون

1- E.Mach, The Science of Mechanics (Chicago, 1893), p.364; R.Dugas, Histoire de la mechanique (Neufchatel, 1950)

فيما بعد. يوضح استخدام الأساليب الهملتونية في الفيزياء الرياضياتية الحديثة الخاصية الأساسية لإسهامات آويلر في خلاف موبيرتيه - كونغ[1].

من الرياضياتيين الذين أيدوا موبيرتيه الشاب ألكسس كلود كلورو Alexis Claude Clairaut البالغ من العمر ثمانية عشر ربيعاً وصاحب العمل Recherches sur les courbes `a double courbure الصادر في 1731، ويعتبر هذا العمل أول محاولة تتناول الهندسة التحليلية والتفاضلية لفضاء المنحنيات. وبعد عودة كلورو من لابلاند نشر كتابه المعنون Theorie de la figure de la terre (1743) وهو عمل ذو مستوى حول اتزان الموائع وتجاذب دوران المجسمات الإهليليجية. استطاع لابلاس أن يطوّر تفاصيلها الفرعية فقط، ومن بين النتائج الكثيرة، الحالة التي تكون فيها المعادلة التفاضلية $Mdx+Ndy$ مضبوطة، كما نشر كلورو عملاً آخر بعد هذا الكتاب تحت عنوان Théorie de la lune (1752) [نظرية القمر] وفيه أضاف موضوعات إلى نظرية آويلر حول حركة القمر ومسألة الأجسام الثلاثة بصورة عامة.

قدم كلورو إسهامات أيضاً إلى نظرية تكاملات الخط والمعادلات التفاضلية، ومن الأنماط التي أخذت بالحسبان معادلة تعرف بمعادلة كلورو، تقدم أول مثال معروف عن الحلول الفردية، وتنسب إلى كلورو المبرهنة التي تنص على أنه إذا كان $z=f(x,y)$ فإن $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ متساويان.

٦

تمركزت المعارضة الثقافية ضد النظام القديم بعد العام 1750 حول الموسوعة الشهيرة Encyclopédie (المكونة من 28 مجلداً، 1751-1772) والتي كان يحررها دينه ديدرو Denis Diderot، وتحت إشرافه قدمت الموسوعة فلسفة التنوير بكل

1- تفاصيل هذا الخلاف موجودة في كتاب آويلر Opera omnia, 2^{nd} ser, Vol.5(1957), تقديم J.O.Fleckenstein.

حذافيرها، إلا أن معرفة ديدرو بالرياضيات لم تكن جديرة بالحسبان[1] ولكن جين لا روند دالمبر Jean Le Rond D'Alembert هو الموجه الرياضياتي للموسوعات، ابن غير شرعي لسيدة أرستقراطية تركته بالقرب من كنيسة سانت جين لا روند St.Jean Le Rond بباريس.

مهدت ألمعية دالمبر المبكرة الحصول على وظيفة، ففي عام 1754 أصبح أمين سر دائم للأكاديمية الفرنسية ثم رجل علم مرموق في فرنسا. ظهر عمل دالمبير الموسوم Traité de dynamique [أطروحة في الديناميك] في 1743 الذي يحتوي على الطريقة التي بها يمكن رد أو اختزال ديناميك الأجسام الصلبة إلى الاستاتيك والمعروف "بمبدأ دالمبير". واصل دالمبير البحث حول الكثير من الموضوعات التطبيقية ولا سيما الهيدروليك [علم قوى الموائع] والأيروديناميك [الديناميك الهوائي] ومسألة الثلاثة - أجسام.

وفي عام 1747 ظهرت نظرية دالمبير المتعلقة باهتزازات الأوتار التي جعلت منه مع دانيال برنولي مؤسساً لنظرية المعادلات التفاضلية الجزئية. وبينما استطاع كلّ من دالمبير وآويلر أن يحلا المعادلة $z_{tt}=k^2z_{xx}$ بواسطة العلاقة $z=f(x+kt)+\varphi(x-kt)$ استطاع برنولي أن يحلها عن طريق المتسلسلة المثلثاتية، إلا

1- هناك قصة شائعة عن ديدرو وآويلر، فحواها ان آويلر في مناظرة عامة بمدينة سانت بطرسبيرغ استطاع أن يربك فكر ديدرو الحر، وذلك بادعائه انه يمتلك برهاناً جبرياً على وجود الله: "سيدي، $\frac{(a+b^n)}{n}=x$ إذاً الله موجود، رجاءً أجب عن ذلك!" هذا ما قاله آويلر إلى ديدرو. هذا مثال جيد لحكاية تاريخية رديئة من حيث إن قيمة الحكاية حول شخصية تاريخية تقع قدرتها في توضيح اتجاهات معينة لشخصيته، فهذه الحكاية المحددة تخدم غموض كلتا الشخصيتين آويلر وديدرو والمعروف عن ديدرو انه على علم ومعرفة بالرياضيات، وله كتب في الاحتمالات والمنحنيات الحلزونية ولا يوجد هناك مبرر أو سبب يدفع آويلر بالطريقة التي ذكرت فالقصة كما تبدو حبكها الرياضياتي الإنجليزي دي مورغان De Morgan (1806-1871). انظر الصفحات L.G.Krakeur and R.L. Krueger, Isis, Vol. 31(1940), pp.431-32 وأيضاً الصفحات Vol,33 (1941) pp.219-31. هناك بالفعل مناسبة في القرن الثامن عشر حول إمكانية وجود إثبات جبري عن وجود الله، ولقد غاص موبيرتيه في واحد من هذه البراهين انظر فولتير Diatribe, Oeuvres, Vol.41(1821 ed) pp.19,30 وأيضاً الدورية الشهرية الرياضياتية الأمريكية B.Brown Amer. Math. Monthly, Vol.49 (1944).

أنه ظلت هناك شكوك مميتة تتعلق بطبيعة هذه الحلول. يعتقد دالمبير أن الشكل الأولي للوتر يمكن أن يعطى بواسطة تعبير تحليلي مفرد، بينما يرى آويلر أن "أي" منحنى مستمر (متصل) سيفي بالغرض، ولكن برنولي يعتقد عكس آويلر تماماً بأن سلسلة حلوله جداً عامة.

ولكن وجب على الشرح الكامل للمسألة أن ينتظر حتى عام 1824 عندما أزاح فورييه الشكوك المتعلقة بصلاحية المتسلسلات المثلثاتية باعتبارها تمثيلاً "لأي" دالة.

كان دالمبير كاتباً بارعاً في الكثير من الموضوعات ومن ضمنها القضايا الأساسية في الرياضيات. كما سبقت الإشارة إلى مقدمته لمفهوم النهاية، ويقال أيضاً إن المبرهنة "الأساسية" في الجبر هي مبرهنة دالمبر وذلك لمحاولته البرهنة عليها في عام 1746. و "مفارقة" دالمبر في نظرية الاحتمال توضح أنه أمعن النظر في أسس هذه النظرية - إذ لم يكن دائماً موفقاً.

تقدمت نظرية الاحتمالات بسرعة في هذه الفترة ويعود الفضل أساساً إلى محاولات فيرما وَباسكال وَهويجنز المتواصلة حيث تتابعت المؤلفات بعد "فن التخمين" ومن بينها The Doctrine of Chances "تعاليم الصدف" الصادر في 1716 لمؤلفه أبراهام دو موافر A. de Moivre البروتستانتي الفرنسي الذي استقر في لندن بعدما تم إلغاؤه بمرسوم Nantes في 1685 وعاش مما يحصله من الدروس الخصوصية. يرتبط اسم دو موافر بمبرهنة في حساب المثلثات تأخذ الشكل: $(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$ وللعلم ظهرت هذه المبرهنة في كتاب آويلر "المقدمة" Introducito.

وفي ورقة بحثية نشرت في 1733 تناول فيها دو موافر اشتقاقاً لدالة الاحتمال الطبيعية باعتبارها تقريباً لقانون ذات الحدين (الحدّانية) وصيغة مرادفة لصيغة الرياضياتي الإنجليزي سترلنج Stirling أحد أتباع المدرسة النيوتنية الذي نشر سلسلة أبحاثه في 1730.

كان لمعظم شركات التأمين وأوراق اليانصيب التي تنظم آنذاك أثر جليل في الكثير من الرياضياتيين، من ضمنها نظرية آويلر في الاحتمالات التي أدت إلى

محاولات تطبيق تعاليم الصدف في مجالات جديدة. جورج لويس ليكليرك G.Louis Leclerc وكوميه دو بوفون Comtes de Buffon مدير Jardin du Roi بباريس وذائع الصيت باعتباره مؤلفاً للتاريخ الطبيعي الذي يقع في ستة وثلاثين مجلداً من أروع ما يمكن، ومقالاته الشهيرة حول التصاميم (1753: le style est de l'homme méme) وهو الذي أدخل في عام 1777 أول مثال للاحتمال الهندسي، وكان هذا معروفاً بمسألة الإبرة والتي شدت خيال الكثير من الناس لكونها تتيح الفرصة لإيجاد قيمة π تجريبياً وذلك برمي الإبرة على مستوٍ مكون من خطوط متوازية متساوية المسافة فيما بينها، ثم حساب عدد المرات التي تسقط فيها الإبرة على خط ما.

وتعود إلى هذه الفترة أيضاً محاولات تطبيق نظرية الاحتمالات على أحكام المرء، فعلى سبيل المثال حساب الحظ لكرسي القضاة بحيث يكون الحكم صادقاً، فإذا كان هناك عدد لكل من الشهود المختلفين وهيئة المحلفين بحيث يعبر عنه باحتمال أن يقول الصدق. هذه أحكام الاحتمالات الملفتة للنظر والتي تفوح بنكهة فلسفة التنوير المميزة. كانت هذه الأشياء حاضرة في أعمال المركيز de Condorcet ولابلاس وحتى في أعمال بواسون Poisson لعام 1837.

8

كان أفضل ممثلي رياضياتيي القرن الثامن عشر الإنجليز هم دو موافر وسترلنج ولاندن، وتجب الإشارة هنا إلى أنه لا أحد من هؤلاء يضاهي من وصل القمة من زملائهم في القارة الأوروبية. فالتقليد يضع بكل ثقل نيوتن الموقر على العلم الإنجليزي. ورموزه التي تفتقر إلى الدقة غير ملائمة إذا ما قورنت برموز زميله ليبنتز مما جعلت التقدم أمراً صعباً. لماذا رفض الرياضياتيون الإنجليز التحرر من أساليب الاشتقاق النيوتنية؟ هذا يعود إلى أسباب اجتماعية متأصلة بعمق. كانت إنجلترا في حروب تجارية دائمة مع فرنسا مما طوّر شعوراً فكرياً بالتفوق الذي تمخض عنه ليس بالانتصارات في الحروب والتجارة بل بالإعجاب أيضاً بما يقتضيه النظام السياسي الذي كان يتمسك به فلاسفة القارة، وأصبحت إنجلترا دائماً

ضحية ادعائها بالتفوق. المقارنة واردة والتشابه موجود بين رياضيات إنجلترا القرن الثامن عشر والإسكندريون القدماء؛ ففي كلتا الحالتين كان التقدم مرهوناً فنياً بالرموز غير الملائمة ولكن جذور الرضا - الذاتي لدى الرياضياتيين كان قابعاً بعمق في الطبيعة الاجتماعية.

يعد كولن مكلورن Colin Maclaurin الرائد الإنجليزي لهذه الفترة - أو بالأحرى الرياضياتي البارز للناطقين بالإنجليزية - كان أستاذاً بجامعة أدنبرة وحواري نيوتن الذي تعرّف عليه شخصياً. تتناول دراسات مكلورن تطوير أساليب الاشتقاقية للرتبة الثانية وما بعد والمنحنيات وتجاذب الأجسام الإهليليجية تماشياً في الوقت نفسه مع جهود معاصريه أمثال آويلر وَكلورا.

تحتل معظم مبرهنات مكلورن مكانة واسعة في نظرياتنا للمنحنيات المستوية وفي الهندسة الوصفية، أما عمله الموسوم Geometria organica الصادر في 1720 فنجد ملاحظة معروفة "مفارقة كرامر" Cramer's paradox التي تنص على أن المنحى ذا الرتبة n لا يمكن تحديده دائماً بالنقط $\frac{1}{2n(n+3)}$. فقد لا تحدد تسع نقط مكعباً بينما عشر نقط تكون جداً كثيرة ومن هنا نجد طرائق سينمائية لوصف منحنيات المستوى لدرجات مختلفة. كتبت "أطروحة الاشتقاقات"Treatise of Fluxions لمكلورن في مجلدين وصدرا في 1742 لتكون دفاعاً عن نيوتن ضد انتقادات بيركلي - إلا أنه من الصعب قراءتها وذلك بسبب اللغة الهندسية للعصور القديمة والتي كانت بالنقيض تماماً لكتابات آويلر التي تخلو من الصعوبة. وكان بحث مكلورن الدائم هو الحصول على الدقة الأرخميدسية (نسبة إلى أرخميدس)، كما احتوى الكتاب على دراسات مكلورن حول تجاذب دوران المجسمات الإهليليجية ومبرهنته حول مجسمين إهليليجيين متحدي البؤرة، فإنهما يجذبان جسيماً على المحور أو على خط الاعتدال بقوى تتناسب مع أحجامهما، كما تعالج "الأطروحة" أيضاً متسلسلة مكلورن الشهيرة.

لم تكن هذه المتسلسلة اكتشافاً جديداً، بل سبق وأن ظهرت في كتاب تايلور B. Taylor - الذي كان لفترة أمين سر للجمعية الملكية - الموسوم

Methodus incrementorum لعام 1715، وَمكلورن من جانب يقر بدينه لتايلور ويمكن الإشارة إلى متسلسلة تايلور بالرموز التي استخدمها لاكرانج بالآتي:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+...$$

لقد ذكر تايلور بكل وضوح المتسلسلة عندما يكون $x=0$ ، إلا أنه لا تزال مقرراتنا الدراسية تصر على تسميتها "متسلسلة مكلورن". لا يتضمن اشتقاق تايلور الاعتبارات التقاربية بينما أشار مكلورن إلى مثل هذه الاعتبارات من البداية - وله أيضاً اختبار التكامل المعروف بالمتسلسلة اللانهائية، ولكن لم يعترف بأهمية متسلسلة تايلور كاملاً إلا عندما طبقها آويلر في حسابه التفاضلي عام 1755 - لقد زودها لاكرانج بالبواقي واستخدمها كأساس لنظريته حول الدوال. استخدم تايلور متسلسلته لتكامل بعض المعادلات التفاضلية، وهو الذي بدأ في دراسة اهتزاز الأوتار الذي سبق وأن تناوله دالمبر وآخرون.

9

ولد جوزيف لويس لاكرانج Joseph Louis Lagrange في تورين Turin من أجداد إيطالية - فرنسية وأصبح أستاذاً للرياضيات في مدرسة تورين المدفعية عندما كان في التاسعة عشرة من عمره أي عام 1755، وعندما غادر آويلر برلين إلى سانت بطرسبيرغ عام 1766 وجه فريدرك الأكبر دعوة إلى لاكرانج يطلب فيها المجيء إلى برلين مصطحباً معه الدعوة برسالته المتواضعة مفادها "وجب من الضروري أن يعيش أعظم هندسي أوروبا بالقرب من أعظم الملوك". وهكذا ظل لاكرانج في برلين حتى وفاة فريدرك في عام 1786 وبعدها غادر إلى باريس، وقدم لاكرانج العون في إصلاح الأوزان والقياسات أثناء الثورة الفرنسية، وفيما بعد عين أستاذاً في مدرسة نورمال في بادئ الأمر عام 1795 ثم في المدرسة التقنية في 1797.

تنصب أعمال لاكرانج الباكرة حول إسهاماته في حساب التغيرات، كما ظهرت مجموعة تقارير آويلر حول هذا الموضوع في 1755، ولكن لاكرانج لاحظ أن طريقة آويلر "لم تكن أطلاقاً سلسة بحيث يمكن قبولها في التحليل البحت"

وكانت النتيجة هي حساب التغيرات التحليلي عند لاكرانج (1760-1761) الذي لم يكن كله اكتشافات جديدة بل موضوعات تاريخية أحسن ترتيبها واستيعابها - وفي حد ذاته أسلوب نمطي في كل أعمال لاكرانج. طبق لاكرانج نظريته في الحال على مسائل الديناميك حيث استخدم صياغة آويلر لمفهوم الفعل الأقل وكانت النتيجة الباعثة على الأسى هي تراجيديا أكاكيا Akakia.

يعود تاريخ معظم الأفكار الأساسية الموجودة في "الميكانيك التحليلي" Mécanique analytique عندما كان لاكرانج في تورين، كما قدم إسهاماً في إحدى المسائل ذات المستوى السائدة في عصره وهي نظرية القمر ذات الأهمية ليس لذاتها فحسب بل لإيجاد حلول للمسائل المتعلقة بخط الطول، ولقد أعطى لاكرانج حلاً محدداً لمسألة الثلاثة - أجسام. تنص مبرهنة لاكرانج (1772) على أنه من الممكن البدء بثلاثة أجسام متناهية بحيث تكون مساراتها عبارة عن إهليليجيات متشابهة يتم وصفها آنياً.

في عام 1767 ظهرت مجموعة تقارير لاكرانج المعنونة Sur la résolution des équations numériques [حول الحلول العددية للمعادلات] والذي قدم فيها أساليب فصل الجذور الحقيقية لمعادلة جبرية ثم تقريبها عن طريق الكسور المستمرة، وتبع هذا العمل بآخر تحت عنوان Réflections sur la résolution algébrique des équations [انطباعات حول حلول المعادلات الجبرية] في 1770 والذي تطرق فيه إلى القضية الأساسية وهي لم تكن أساليب الحلول ذات جدوى لمعادلات الدرجة $n \leq 4$ وليست صالحة $n > 4$. قادت هذه المحاولات لاكرانج إلى الدوال المنطقة (النسبية) للجذور وسلوكها في ظل تباديل الجذور، وهو الأسلوب الذي لم يثر روفيني Ruffini وآبل Abel في أعمالهما للحالة التي تكون فيها $n > 4$ فحسب، بل قادت غالوا Galois إلى نظريته المتعلقة بالزمر groups. أحرز لاكرانج تقدماً في نظرية الأعداد عندما تحرى البواقي التربيعية وبرهن من ضمن المبرهنات العديدة على أن كل عدد صحيح هو مجموع أربعة أو أقل من أربعة تربيعات.

كرّس لاكرانج الجزء الثاني من حياته في تأليف أعماله الرائعة: "الميكانيك التحليلي" Mécanique analytique (1788) و "نظرية الدوال التحليلية"

و "دروس حول حساب التفاضل Theorie des fonctions analytique (1797) والتكامل للدوال" Leçons sur le calcul des fonctions (1801). الكتابان المتعلقان بالدوال عبارة عن محاولة لإعطاء الأسس الصلبة لحساب التفاضل والتكامل ثم اختزاله إلى الجبر. رفض لاكرانج نظرية النهايات التي وضحها نيوتن وصاغها دالمبر، فهو لم يفهم تماماً ما يحدث عندما تؤول $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ إلى نهايتها. وعلى حد تعبير كارنو Lazare Carnot منظم انتصارات الثورة الفرنسية organisateur de la victoire الذي كان متحفظاً تجاه أسلوب نيوتن حول اللامتناهيات في الصغر: إن الوضع الذي تتلاشى فيه الكميات هو أسلوب غير ملائم إطلاقاً، ونتحدث عن كونها كميات، إن ما نستطيع تصوره دائماً مجرد نسب لكميتين طالما بقيتا متناهيتين، والنسبة في حد ذاتها لا تقدم بيانات واضحة ودقيقة للعقل طالما تصبح حدودها من حين إلى آخر لاشيء مع الوقت نفسه[1].

يختلف أسلوب لاكرانج عمّن سبقه، فهو يبدأ بمتسلسلة تايلور حيث قام باشتقاق بواقيها مبرهناً بأسلوب بسيط أو بالأحرى أن "أي" دالة $f(x)$ يمكن التعبير عنها بمتسلسلة بالاستعانة طبعاً بالعمليات الجبرية البحتة. لذا فإن الاشتقاقات $f'(x), f''(x), f'''(x),...$ يمكن تعريفها باعتبارها عوامل $h, h^2,...$ في مفكوك تايلور $f(x+h)$ بدلالة h (الرموز $f'(x), f''(x)$ من وضع لاكرانج.

غدا الأسلوب "الجبري" حول تأسيس حساب التفاضل والتكامل غير مرضٍ على الرغم من أن لاكرانج لم يعر اهتماماً كافياً للمتسلسلة التقاربية، لذا فإن المعالجة الصرفة للدالة يمكن اعتبارها خطوة متقدمة، ومن هنا ظهرت أول "نظرية لدوال المتغير الحقيقي" مع تطبيقات واسعة للمسائل المتنوعة في الجبر والهندسة.

ربما يكون عمل لاكرانج "الميكانيك التحليلي" الأكثر نفعاً ولا يزال بوسعه أن يقدم المزيد لدراسة متأنية، هذا الكتاب الذي ظهر بعد مئة عام على تحفة نيوتن "المبادئ" يطبق التحليل المطور حديثاً بكل ما أوتي من قوة على ميكانيك الجسيمات والأجسام الصلبة. وهكذا تم استيعاب وتطوير نتائج آويلر

1- L.Carnot, Réflexions sur la metaphysique du calcul infinitesimal, 5th ed (Paris,1881) p.147 وانظر ايضاً F.Cajori, Amer.Math.Monthly,Vol.22 (1915),p.148

وَدالمبر ورياضياتيي القرن الثامن عشر من وجهة نظر متماسكة، مما جعل الاستخدام الكلي لحساب التغير عند لاكرانج حول توحيد المفاهيم المتنوعة في الإحصاء والديناميك ممكناً - استخدام مفاهيم السرعات الافتراضية في الإحصاء ومبدأ دالمبر في الديناميك. وطبيعياً أدى هذا إلى الإحداثيات المعممة وإلى معادلة الحركة بصورتهما اللاكرانجية [نسبة إلى لاكرانج] الآتية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=F_i$$

وهكذا فإنه تم التغاضي عن محاولة نيوتن الهندسية نهائياً، ولذا يعد كتاب لاكرانج انتصاراً للتحليل البحت وغدا المؤلف ليؤكد أبعد من ذلك في الاستهلال:

on ne trouvera point de figures dans cet ouvrage, seulement des opérations algébriques[1].

10

نصل الآن إلى آخر روّاد رياضياتي القرن الثامن عشر حيث نلتقي مع بيريه سيمون لابلاس Pierre Simon Laplace ابن مالك نورماندي صغير، تلقى تعليمه في مدينتي بيمو Beaumont وَكين Caen وبمؤازرة دالمبر أصبح أستاذاً للرياضيات في مدرسة باريس الحربية. كانت مهمات لابلاس في المدرسة تدريسية وأخرى إدارية، وأثناء الثورة ألقيت على عاتقه مهمة تنظيم مدرسة نورمال وكذلك المدرسة التقنية، ومنحه نابليون درجات شرف كثيرة وبالمثل لويس الثامن عشر. غيّر لابلاس ولاءه السياسي بكل بساطة بخلاف مونج وَكارنو، فكل شيء بالنسبة له يعتبر نوعاً من التملق، ولكن تسامحه الدائم مكنه من مواصلة نشاطه الرياضياتي البحت على الرغم من التغيرات السياسية في فرنسا.

إن عملي لابلاس الرائعين اللذين لم يوحدا دراساته وأبحاثه فحسب، بل جميع أعماله السابقة، هما Theorie analytique des probabilities (1812) [النظرية

1- ليست هناك اشكال في هذا العمل، ليس إلا عمليات جبرية. استخدمت كلمة "جبرية" بدلاً من "التحليلية" وهي خاصية

التحليليـة للاحتمـالات] و Mécanique céleste (1799-1825) [ميكانيـك الـسماء] المكون مـن خمسة أجزاء. تضمن كـلا العملين التاريخيين تمهيداً شـاملاً وشـرحاً خالياً مـن الألفـاظ الفنيـة، Essai philosophique sur les probabilities (1814) [مقالـة فلسفية حـول الاحتمـالات] و Exposition du systéme due monde (1796) [شـرح منظومة العـالم] حيث يحتوي هذا الشرح على الفرضية السديمية بصورة مـستقلة عـن كانـت I.Kant الـذي تطـرق إليهـا في عـام 1755 (وحتـى سـويدنبورغ Swedenborg في عام 1734 قبل كانت).

يعتبر "ميكـانيك السماء" بمثابـة تتويجـاً لأعمـال نيوتن وَكلورا وَدالمبر وآويلـر وَلاكـرانج وَلابـلاس حـول شـكل الأرض ونظريـة القمـر ومـسألة الثلاثـة - أجـسام وترجاف (اضطراب)[1] الكواكب التي أدت إلى مسألة مهمة حول استقرار المنظومة الشمسية. يذكرنا اسم "معادلة لابلاس":

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

بنظرية الجهد وهي جزء من ميكـانيك السماء (سبق وأن تطـرق آويلـر في عـام 1752 إلى المعادلة نفسها عندما كان يشتق بعض معادلات الهيـدروديناميك الرئيسة). وحول عناقيـد المجلدات الخمسة تكمن نـوادر وحكـايات، إحـداها جـواب لابـلاس الشهير إلى نـابليون الـذي حـاول أن يـسخر منـه بملاحظتـه وهـو أن الله لم يـذكـر في كتاب لابلاس "ميكانيك السماء"، فكان رده Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothése[2] "لست بحاجة إلى مثل هذه الفرضية".

كان تعليق ناثينال بودج Nathaniel Bowditch من بوسطن الذي ترجم الأجزاء الأربعة من أعمال لابلاس إلى الإنجليزية: "لم أصادف قط واحدة من عبارات لابـلاس وهكـذا بكـل بـساطة ظهـرت ودون الـشعور بالتأكيـد أن هنـاك أوقاتـاً عـصيبة مـن العمل المضني أمـامي لـتملأ الهوة وأن تجـد وتوضـح كيـف تظهـر بكـل بـساطة". بدأ هملتـون تحـصيله الرياضـياتي حـول إيجـاد خطـأ في كتـاب لابـلاس "ميكـانيك

1- Perturbation الترجاف (الاضطراب): اضطراب الجرم السماوي في حركته المدارية بسبب قوة أخرى غير تلك التي تسبب في دورانه النظامي.

2- Sir, I did not need this hypothesis.

السماء"، وومضت فكرة النظرية الرياضياتية للكهرباء من قراءات غرين Green لأعمال لابلاس.

تعتبر "مقالة فلسفية حول الاحتمالات" من المقدمات الأكثر طوعاً للقراءة عن نظرية الاحتمالات، وتحتوي المقالة على التعريف "السالب" للاحتمالات الذي يفترض "الأحداث متساوية الأرجحية":

> تحتوي نظرية الصدفة على اختزال كل الأحداث من النوع ذاته إلى عدد معين من الحالات متساوية الأرجحية، تلك الحالات التي لا نستطيع اتخاذ القرار حول وجودها، ولكي نحدد عدد الحالات المفضلة للحدث الذي نبحث عن احتمال له.

ووفقاً إلى لابلاس فإن مسائل الاحتمال تبرز جزءاً من جهلنا وجزءاً من معرفتنا، وهذا يقود لابلاس إلى عبارته الشهيرة التي تلخص التفسير الميكانيكي المادي للقرن الثامن عشر:

> يدرك المرء العاقل في أي لحظة بأن جميع القوى التي تدب فيها الطبيعة بالحياة والأماكن الخاصة التي تهيئها للكائنات وبالإضافة إلى هذا كله فهناك البيانات التي يجب أن تخضع للتحليل، وسوف تتضمن الصيغة عينها لحركة الأجسام الكبيرة في الكون وكذلك أخف الذّرات: لا يوجد شيء غير حتمي لها، فالماضي والحاضر سيكونان عندئذ حاضرين للعيان، لذا فالعقل البشري يقدم مخططاً واهناً لهذا العاقل بصورة تامة والذي باستطاعته أن يعطيه إلى علم الفلك.

فالمقرر الدراسي ذاته ذو مستوى قياسي مفعم بموضوعات كثيرة حتى آخر الاكتشافات في نظرية الاحتمالات التي نجدها عند لابلاس[1]. يحتوي هذا المجلد الضخم على مناقشة مسهبة حول الألعاب والحظ والاحتمالات الهندسية ومبرهنة برنولي وعلاقتها بالتكامل الطبيعي (السوي)، ونظرية التربيعات الصغرى (الأقل) التي ابتكرها لجندر Legendre. كانت الفكرة البارزة هي استخدام الدوال المولدة والتي يوضح فيها لابلاس قوى فروق المعادلات، وهنا نجد "تحويل لابلاس" والذي أصبح فيما

1- E.C.Molina, "The Theory of Probability: Some Comments on Laplace's Theorie analytique", Bull. Am. Math. Soc., Vol.36 (1930), pp.369-92

بعـد نقطـة انطـلاق لحسـاب هفسـايد العمليـاتي Heaviside operational calculus.
لقد استرد لابلاس من عفو النظرية التي تم إعادة صوغها من قبل توماس بيز Thomas Bayes، راهب إنجليزي مغمور نشرت أعماله بعيد وفاته في الفترة 1763-1764 وأصبحت هذه النظرية تعرف بنظرية الاحتمالات العكسية.

11

ثمة حقيقة غريبة مع نهاية القرن وهي أن هناك من الرياضياتيين البارزين من عبّر عن شعوره بأن حقل الرياضيات قد استنفد إلى حد ما. فالجهود المضنية التي قام بها آويلر و لاكرانج و دالمبر وآخرون أدت جميعها إلى مبرهنات ذات أهمية قصوى، فالمقررات الدراسية العديدة ذات المستوى المرموق وضعتهم أو بالأحرى ستضعهم عاجلاً في المكان اللائق بهم ولذا من هذا المنطلق فإن قلة من رياضياتي الجيل القادم لن يجدوا سوى النزر القليل من القضايا التي يراد حلها.

كتب لاكرانج إلى دالمبر في عام 1772 الآتي:

Ne vous semble-t-il pas que la haute géométrie va un peu `a décadence? Elle n'a d'autre soutien que vous et M.Euler[1]

وتجدر الإشارة هنا إلى أن لاكرانج قد توقف عن نشاطه الرياضياتي لفترة، أما دالمبر فقد كان أمله ضعيفاً أن يقدم شيئاً جديداً، آراغو Arago من جانبه عبّر عن عاطفته في `Eloge de Laplace (1842) مما يتيح لنا أن نفهم هذا الشعور:

خمسة من رجال الهندسة: كلورا وآويلر وَدالمبر وَلاكرانج وَلابلاس، تقاسموا فيما بينهم العالم الذي كشفه نيوتن عن الوجود، جميعهم سبروا غور هذا العالم من جميع اتجاهاته وأبحروا إلى مناطق يعتقد أنه لا يمكن الوصول إليها وأشاروا إلى عدد لا يحصى من الظاهر لتلك المناطق والتي تعجز المشاهدة عن وصفها بعد. وأخيراً - وهنا يكمن مجدهم الخالد - لقد جاؤوا بقانون متميزٍ ضمن مجال المفهوم الواحد أكثر غموضاً وحذاقة في حركات الأجرام السماوية. ولدى الهندسة

1- "هل يبدو اليك بان تسامي الهندسة قد امسى متدهوراً؟ فهي ليس لها دعم آخر سوى السيد أويلر. استخدمت "الهندسة" في فرنسا القرن الثامن عشر للرياضيات بوجه عام".

الجسارة أيضاً أن تقدر المستقبل، فعندما تكشف الأزمان عن ذاتها ستصدق بدقة قرارات العلم[1].

تشير خطبة آراغو إلى المصدر الرئيس لهذه التشاؤمية fin de si`ecle، التي احتوت على نزعة لتحديد تقدم الرياضيات والميكانيك وعلم الفلك. لقد أرشد وألهم علم الفلك منذ العصور القديمة عند شعوب بابل مروراً بآويلر ولابلاس معظم الاكتشافات السامية في الرياضيات، وهكذا نجد هذا اليوم تتويجه. وعلى أي حال ها هو جيل جديد ألهم بتطلعات مستقبلية جديدة فتحتها الثورة الفرنسية بالإضافة إلى أن ازدهار العلوم الطبيعية سيرينا كيف أن هذه النظرة التشاؤمية ليس لها أساس من الصحة، كان هذا الزخم الجديد قادماً من أحد أجزاء فرنسا وها هو قادم أيضاً وغالباً ما يحدث في تاريخ الحضارات من مناطق الحدود الخارجية السياسية والاقتصادية ولكن هذه المرة من غاوس في غوتنجن.

1- F.Arago, Oeuvres completes (Paris-Leipzig, 1855), Vol,3, p.464.

الفصل الثامن

القرن التاسع عشر

أ

خلقت الثورة الفرنسية والعصر النابليوني ظروفاً ملائمة جداً لتطور الرياضيات أبعد مما كانت عليه، فكان الطريق مفتوحاً لثورة صناعية في القارة الأوروبية، حيث حفّز قطف ثمار العلوم الفيزيائية خلق طبقات جديدة بتطلعات مختلفة للحياة مندفعة ومهتمة في العلم والتعليم التقني، الأمر الذي أدى إلى تغلغل الأفكار الديمقراطية في الحياة الأكاديمية، وهكذا برز على السطح النقد ضد الصور البالية للأفكار، مما حتم على المدارس والجامعات أن تجدد ويحدث فيها الإصلاح.

لم تكن الإنتاجية الرياضياتية الجديدة المتدفقة أساساً نتيجة المسائل الفنية التي تمت إثارتها من قبل الصناعات الجديدة، حيث كانت إنجلترا تمثل القلب النابض للثورة الصناعية إلا أنها باتت عقيمة رياضياتياً إلى درجة ما لعقود عدة.

تقدمت الرياضيات بشيء من الازدهار في فرنسا إلى حد ما وفيما بعد في ألمانيا، أما في البلدان التي كانت لها انعطافات أيديولوجية سابقة فقد شعرت بالحاجة إلى نوع كهذا وإلى القيام بتغيرات جارفة أو إلى القيام بإعداد خلفية للاقتصاد الرأسمالي الجديد والبيئة السياسية، وهكذا بدأت البحوث الرياضياتية تحرر نفسها تدريجياً من النزعات البالية ثم المضي قدماً نحو علم الفلك والميكانيك حتى مرماها الأخير وهو العلوم الدقيقة. أصبح السعي نحو العلوم بصورة عامة أكثر استقلالية عن احتياجات الحياة الاقتصادية أو الرفاهية، وطور المتخصصون

اهتماماتهم في العلوم من أجل العلم ذاته فحسب. أما بالنسبة إلى الصلة بين العلم والتطبيق فظلت قائمة ولكن يكتنفها نوع من الغموض، وإن الفصل الحاسم بين الرياضيات "البحتة" و "التطبيقية" الذي لم يكن موجوداً في العصور السابقة ولكنه بات ملازماً لتطور التخصص[1].

وهكذا أصبح لا طائل أن يكون رياضياتيي القرن التاسع عشر في البلاطات الملكية والقاعات الأرستقراطية، ولم تعد وظيفتهم الرئيسة مقيدة بعضويتهم في أكاديمية تعليمية، فعلى الأرجح كان يتم تعيينهم من قبل الجامعات أو مدارس تقنية فكانوا مدرسين وباحثين في الوقت نفسه، فمثلاً برنولي Bernoullis[2] وَلاكرانج Lagrange وَلابلاس Laplace حصلوا على تعليمهم بصورة غير نظامية، مما أدى إلى تفاقم المسؤولية التدريسية وأصبح أساتذة الرياضيات معلمين وممتحنين للشبيبة.

غدت دولية القرون السابقة خاضعة لنمو العلاقات بين العلماء لكل أمة رغم أن التبادل الدولي للآراء ظل قائماً وتدريجياً. حلت اللغة اللاتينية العلمية مكان اللغات المحلية وبدأت الرياضيات تأخذ دورها في المجالات المتخصصة وفي الوقت الذي كان

1- وجد الفرق في منحى التعبير الكلاسيكي في ملاحظة لجاكوبي Jacobi [يلفظ بالألمانية ياكوبي ولكن آثرنا استخدم اللفظ الإنجليزي] حول آراء فوريبه Fourier الذي لازال يمثل الاتجاه النفعي للقرن الثامن عشر.

"Il est vrai que Monsieur Fourier avait l' opinion que le but principal des mathematique etait l''utilite publique et l'explication des phenomenes naturals; mais un philosphe comme lui aurait du savoir que le but unique de la science, c' est l' esprit humain, et que sous ce titre une question de number vaut autant qu'une question du systeme du monde"

"إن الذي يعتقد به السيد فوريبه هو الصواب بعينه وإن الغاية الأساسية للرياضيات هي المصلحة العامة وتفسير الظواهر في الطبيعة، ولكن فيلسوفاً كهذا وجب عليه أن يعلم أن غاية العلم الوحيدة هي إجلال العقل البشري، وتلك من وجهة نظر السؤال المتعلق بالعدد فلابد ان تكون اهميته كأهمية السؤال حول منظومة العالم". في عام 1830 كتب غاوس Gauss إلى لجندر Legendre يصف له توليفة الرايين وغاوس يطبق الرياضيات على الفلك والفيزياء والجيودسي (متقاصر) وفي الوقت نفسه يعتبر "الرياضيات" انها ملكة العلوم "والحساب ملك الرياضيات" [أوردت كلمة queen في الحالتين وتعني ملكة].

2- يقصد هنا برنولي الثلاثة وهم يعقوب ويوهان ودانيال - المترجم.

يوصف ليبنتز Leibniz وَأويلر Euler وَدالمبر d'Alembert باعتبارهم رياضياتيين (هندسيو القرن الثامن عشر بمعنى الكلمة)، يمكن تصور كوشي Cauchy رجل تحليل وَكايلي Cayley رجل جبر وَشتاينر Steiner رجل هندسة (وحتى هندسي صرف) وَكانتور Cantor رائداً في نظرية المجموعات (نظرية المجاميع aggregates). وهكذا كان الوقت مواتياً "للفيزيائيين الرياضياتيين" كي يلحقوا بركاب رجال أتقنوا "الإحصاء الرياضياتي" أو "المنطق الرياضياتي"، لذا تم تقسيم التخصص على مستوى عال جداً من العبقرية ومنها استقى القرن التاسع عشر قوته الدافعة من أعمال غاوس Gauss وَريمان Riemann وَكلاين Klein وَبوانكاريه Poincare.

2

يتربع على عرش الحد الفاصل بين رياضيات القرن الثامن عشر والتاسع عشر سعادة السيد كارل فريدريك غاوس Carl Friedrich Gauss. ولد غاوس في مدينة برونسفيك Brunswick بألمانيا لابن عامل يأخذ أجره اليومي، مما دفع دوق برونسفيك بالاعتراف والتعاطف بمعجزة الطفل غاوس وفي شبابه تحمل أعباءه المالية لإكمال دراسته وتلقى الشاب العبقري تعليمه من 1795 إلى 1798 في غوتنجن Gottingen وفي عام 1799 نال درجة الدكتوراه في جامعة هلمشتت Helmstedt.

بدءاً من عام 1807 حتى وفاته في 1855 عمل بهدوء ودون أي إزعاج مديراً للمرصد الفلكي وأستاذاً في الكلية الأم [أي التي تخرج فيها]، وعزلته واستيعابه للرياضيات "البحتة" و "التطبيقية" واستخدامه المتكرر للغة اللاتينية كل هذا كان له لمسة في القرن الثامن عشر في الوقت الذي يفصح عمله عن عصر جديد يقف غاوس جنباً إلى جنب معاصريه أمثال كانت Kant[1]

1- كانت (كانط)، إمانويل (1724-1804) فيلسوف ألماني ولد ومات في كونسبيرغ - بروسيا الشرقية - من أسرة برجوازية يعود أصلها فيما يبدو إلى اسكتلندا، وصاحب مؤلفات كثيرة أهمها "نقد العقل الخالص" و "نقد العقل العملي" و "أسس ميتافيزيقيا الأخلاق" و "نقد الحكم" و "الدين في حدود العقل".

وغوته Goethe[1] وَبيتهوفن Beethoven[2] وَهيغل Hegel[3] وأقطاب الصراع السياسي العظام في الدول الأخرى، ولكنه يعبر عن مجاله في عصره بأفكار جديدة وبأسلوب أكثر قوة.

توضح يوميات غاوس أنه عندما كان في السابعة عشر من عمره بدأ القيام باكتشافات رائعة، فعلى سبيل المثال في عام 1795 اكتشف بصورة مستقلة عن آويلر قانون التربيع التبادلي (العكسي)[4] في نظرية الأعداد. نشرت معظم اكتشافاته في أطروحة تقدم بها إلى جامعة هلمشتت في عام 1799، وكذلك ورد في عمله ضائع الصيت "دراسات الحساب" Disquistiones Arithmeticae لعام 1801.

لقد أعطت الأطروحة أول برهان دقيق بما يسمى "المبرهنة الأساسية للجبر" والتي تنص على أن أي معادلة جبرية بالعوامل الحقيقية لديها على الأقل جذر واحد ومن ثم n من الجذور. قد يعود تاريخ هذه المبرهنة إلى ألبرت غيرارد A. Girard محرر أعمال ستيفن Stevin (Invention nouvelle en algebre) لعام 1629 (ابتكارات جديدة في الجبر)، حاول دالمبر أن يعطي برهاناً لها في عام 1746. فتن غاوس بالمبرهنة وأعطى فيما بعد إثباتين آخرين، وبالنظر إلى برهانه الرابع لعام 1849 وبرهانه الأول وفي برهانه الثالث لعام 1816 نجد أنه استخدم التكامل العقدي مما يوضح لنا مدى إتقان غاوس المبكر لنظرية الأعداد العقدية complex numbers.

1- يوهان فولفغنغ غوته هو شاعر واديب الماني (1749-1832) له عدد من الأشعار والروايات والمسرحيات بالإضافة إلى أبحاث علمية وأعمال إدارية لكونه وزيراً لمنطقة فيمار وهو صاحب "ديوان الشرق والغرب" ومسرحية "فاوست" ورواية "آلام فيرتر".

2- لودفيغ فان بيتهوفن (1770-1827) موسيقار ومؤلف موسيقي ولد في بون ومات في فيينا.

3- هيغل، جورج فلهلم فريدريش (1770-1831) فيلسوف الماني ولد في شتوتغارت ومات بالكوليرا في برلين من مؤلفاته "حياة يسوع" و "فينومينولوجيا الروح" "موسوعة العلوم الفلسفية" "مبادئ فلسفة القانون" و "دروس في فلسفة التاريخ". المترجم

4- تعاكس تربيعي: القانون القائل إذا كان p و q عددين أوليين فرديين، فان p يكون باقياً تربيعياً لـ q إذا وفقط إذا كان q باقياً تربيعياً إلى p، إلا إذا كان كلاهما مطابقين لـ 3 بمقاس 4، وفي هذه الحالة يتحقق العكس: بمعنى ان p يكون باقياً تربيعياً لـ q إذا وفقط إذا كان q باقياً تربيعياً لـ p. -المترجم

احتوى "دراسات الحساب" في طياته جميع الأعمال المتميزة في نظرية الأعداد للذين سبقوا غاوس وتم إثراؤها إلى درجة يمكن اعتبارها بداية لنظرية حديثة للأعداد إن لم تكن بداية لها مع صدور هذا الكتاب. كان فحواه يدور حول نظرية التطابقات التربيعية quadratic congruences والأشكال forms والبواقي residues التي بلغت ذروتها في قانون البواقي التربيعية، حيث أدلى غاوس بأول برهان كامل لمبرهنة aureum. فتن غاوس بهذه المبرهنة واعتبرها مبرهنة أساسية للجبر مما قاده أخيراً إلى نشر خمسة إثباتات أخرى وآخرها وجد بين أوراقه بعد وفاته. احتوى "الحساب" أيضاً على دراسات غاوس حول تقسيم الدائرة، بمعنى آخر حول جذور المعادلة $x^n = 1$.

أدت هذه المعادلة إلى مبرهنة رائعة وهي أن أضلاع المضلع المنتظم المكون من 17 ضلعاً (بصورة عامة للمضلع المكون من n ضلعاً فإن $n = 2^p + 1$ و $p = 2^k$ ... $k = 0,1,2,3,...$) يمكن إنشاؤه بالمسطرة والفرجار وحدهما، وهذا يذكرنا بالعزف على وتر هندسة الاغريق.

أثير اهتمام غاوس في الفلك منذ اليوم الأول لبداية القرن (الأول من يناير 1801) عندما اكتشف بيازي Piazzi في باليرموPalermo أول كويكب أطلق عليه سيرس Ceres، ولم يؤخذ في وقتها سوى مشاهدات طفيفة عن الكويكب الجديد. استطاع غاوس أن يقوم بحل المسألة كاملاً والتي أدت في نهاية المطاف إلى معادلة من الدرجة الثامنة، ولكن عندما اكتشف بالس Pallas كويكباً آخر في 1802 بدأ اهتمام غاوس في الاضطراب القرني [أي الذي يحدث في كل قرن] للكواكب.

أدى هذا إلى عمل غاوس الموسوم Theoria motus corporum coelestium "نظرية الحركة للأجرام السماوية التي تدور حول الشمس بقطاعات مخروطية" لعام 1809[1]، وإلى ورقته البحثية حول تجاذب المجسمات الإهليليجية العامة (1813) وعمله حول التربيعات الميكانيكية (1814) ودراسته حول الاضطراب القرني (1818)، وتعود ورقة غاوس البحثية المتعلقة بالمتسلسلات فوق هندسية

1- ترجم إلى Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections من قبل Charles Henry Davis.

hypergeometric (1812) والـتي أتاحـت الفرصـة إلى مناقـشة عـدد كـبير مـن الـدوال (التوابـع) مـن وجهـة نظـر واحـدة. إنهـا أول دراسـة منتظمـة عـن تقاربيـة المتسلسلة.

بـدأ غـاوس بعـد عـام 1820 يركـز نـشاطه علـى علـم المتقاصـر (الجيودسـي) geodesy ، ممـا يعـني أنـه ضـم الأعمـال التطبيقيـة الـشاملة إلى المسـح أو القيـاس بالاستعانة بحساب المثلثات بالإضافة إلى البحوث النظرية. أحد هذه النتائج تحقيقاته ودراسـاته حـول طريقـة التربيعـات الـصغرى (الأقـل) least squares method (1823 و 1821) والـتي سـبق وأن تناولهـا لجنـدر Legendre في عـام 1806 ولابـلاس Laplace. وقد يكـون أهـم إسـهام في فترة حيـاة غـاوس هـو نظرية السطوح والتي تطـرق إليهـا بصورة مختلفـة عـن مـونج Monge في بحثـه الموسـوم Disquisitiones generales circa superficies curves (1827). وعودة أخرى مع الاعتبارات التطبيقية في مجال المتقاصر المتقدم حيث هناك الصلة الحميمة مع التحليل النظري الباهر، ظهـر إصـدار في هـذا الشأن بمـا يسمى الهندسـة الحقيقيـة للسطوح، حيـث اسـتخدمت إحداثيات المنحنـى الخطـي للتعـبير عـن العنـصر الخطـي ds في المعادلـة التفاضلية التربيعيـة الـتي تأخـذ الشـكل: ds2= Edu2+Fdudv+ G dv2.

هنـاك أيضاً النقطـة المهمـة في مبرهنـة التفـرد egregium والـتي تـنص علـى أن مجموع انحناءات السطح تعتمد فقط على القيم G,F,E واشتقاقاتها ومن ثـم فهـو ثـني ثابت، ولكـن غـاوس لم ينس غرامـه الأول "ملكـة الرياضيات" حتـى في هـذه الفـترة موليـاً جـل اهتمامـه إلى مسـائل المتقاصـر. ظهـر عملـه في العـامين 1825 و 1831 حـول البواقي التربيعانية [القوة الرابعة] فهو لـيس إلا اسـتمرار لنظريـة البـواقي التربيعيـة في "الحسـاب" ولكنـه الاسـتمرار الـذي تم بعـون الطريقـة الجديـدة وهـي نظريـة الأعـداد العقدية.

لم تقدم أطروحة عام 1831 جبر الأعداد العقدية فحسب، بل الحساب أيضاً، وظهـرت نظريـة جديـدة للعـدد الأولـي بحيـث يظـل 3 عـدداً أوليـاً ولكـن العـدد 5=(1+2i)(1-2i) لا طائل أن يكـون عـدداً أوليـاً. لـذا فقـد بينـت نظريـة العـدد العقـدي الكثير من النقاط الغامضة في الحساب من حيث أن قانون التربيع العكسي أبسط

من الأعداد الحقيقية. لقد نبذ غاوس إلى الأبد في هذه الورقة السر الذي لا يزال محاطاً بالأعداد العقدية وذلك بتمثيله لها بنقط على مستو[1].

يمثل النصب التذكاري المقام في غوتنجن تمثال غاوس وزميله الشاب وليم فيبر W. Weber وهو في طريقه لاكتشاف التلغراف الكهربائي، حدث ذلك في 1833-1834 في الوقت الذي أولى غاوس اهتمامه في الفيزياء، ففي هذه الفترة أنجز الكثير من الأعمال التجريبية عن المغناطيسية الأرضية، ولكن سنحت له الفرصة في الإسهام النظري من الدرجة الأولى - في عمله المتعلق Allgemeine Lehrsatze حول نظرية القوى المؤثرة التي تتناسب تناسباً عكسياً مع مربع المسافة (1839-1840).

كان هذا بداية لنظرية الجهد باعتبارها فرعاً منفصلاً عن الرياضيات (علماً بأن ورقة غرين Green لعام 1828 لم تكن معروفة آنذاك) مما أدى إلى مفاهيم أقل حول فضاء التكاملات والتي تعرف "مبدأ درخليه" Dirichlet's principle. أما بالنسبة إلى غاوس فإن وجود الحد الأدنى كان جلياً، وأصبح فيما بعد موضع نقاش لم يحسم إلا حديثاً على يد هلبرت Hilbert.

ظل غاوس نشطاً طوال حياته حتى وفاته في عام 1855، ولكن وجه جل اهتمامه في السنوات الأخيرة من عمره إلى الرياضيات التطبيقية، أما كتاباته فلم تعط صورة مرضية بما يتناسب مع عظمته حيث كشف ظهور يومياته وبعض رسائله الكثير عن أشياء كان يخفيها تركها لذاته. وكما نعلم أن غاوس مع بداية 1800 اكتشف الدوال الإهليليجية (الناقصية) elliptic وفي عام 1816 تقريباً كان في حوزته هندسة لاإقليدية ولكنه لم ينشر أي شيء يتعلق بهذين الموضوعين اللهم في بعض المراسلات مع أصدقائه، حيث أفصح عن وضعه الحرج تجاه محاولاته لإثبات بدهية إقليدس للمتوازيات. يبدو أن غاوس لم يكن راغباً الخوض جهراً في أي موضوع مثير للجدل، ففي رسائله كتب عن الطنين الذي يسمعه في أذنيه، وعن صراخ البويتن Boeotians الذي يدوي حتى لو لم يخف أسراره. أما بالنسبة إلى غاوس

1- قارن E.T.Bell "Gauss and the Early Development of Algebraic Numbers" Nat. Math. Mag. vol.18 (1944), pp.188, 219.

أويلر ورياضياتيين آخرين بعد فكروا من أجل تمثيل الأعداد العقدية انظر:
Introduction to Euler," Opera omnia, 1st ser, vol28 (1955), pxxxvii.

الشخص فكان شاكاً في صلاحية المفاهيم الكانتية (نسبة إلى كانت) المسلم بها حول مفهوم المكان (الفضاء) باعتباره إقليدياً قبلياً a priori، فهو يرى أن فضاء الهندسة الصحيح هو الحقيقة الفيزيائية التي يمكن اكتشافها بالتجربة.

3

استطاع فليكس كلاين F.Klein أن يعقد مقارنة لرياضيات القرن التاسع عشر بين غاوس ورياضياتي فرنسي يافع يبلغ من العمر خمسة وعشرين ربيعاً هو أدرين - ماريه لجندرAdrien-Marie Legendre. قد يكون نوعاً من الإجحاف في حق غاوس أن يقارن مع رياضياتي آخر إلا إذا كان هذا الرياضياتي أو ذاك عظيماً جداً ومع ذلك توضح لنا هذه المقارنة المحددة كيف كانت أفكار غاوس "عالقة في الهواء" حتى جاء لجندر بأسلوبه الخاص وبصورة مستقلة أن يتناول معظم الموضوعات التي كانت تشغل بال غاوس. درس لجندر من 1775 إلى 1780 في المدرسة الحربية بباريس وفيما بعد شغل مناصب حكومية مختلفة، أستاذاً في المدرسة Normale وممتحناً في المدرسة الصناعية وماسحاً جيوديسياً.

كانت للجندر أعمال أساسية في نظرية الأعداد مثل غاوس، حيث أعطى صياغة لقانون التربيع العكسي، وكانت له أعمال ذات أهمية في الجيودسي[1] وعلم الفلك النظري، وكان مجتهداً ومواظباً مثل غاوس للجداول الحاسوبية، استطاع صوغ طريقة التربيعات الأقل (الصغرى) في عام 1806، كما درس تجاذب المجسمات الإهليليجية - حتى تلك التي ليست سطوحاً للدوران. ومن هذا المنطلق أدخل لجندر "دوال لجندر"، كما شاطر اهتمامات غاوس في التكاملات الناقصية والآويلرية (نسبة إلى آويلر) وكذلك في أسس أساليب الهندسة الإقليدية.

وعلى الرغم من أن غاوس سبر أعماق طبيعة مجالات الرياضيات المختلفة إلا أن لجندر قدم أعمالاً متميزة وذات أهمية، وكتبه الدراسية الشاملة كانت

1- geodesy المتقاصر: فرع من الرياضيات التطبيقية يعنى بدراسة شكل الأرض وبقياس سطحها - المترجم

لـزمن طويل ذات نفوذ وسلطة وتحديداً أعماله الموسومة Exercices due calcul integral تمارين حول حساب التكامل المكون من ثلاثة مجلدات (1811-1819) و Traite des fonctions elliptique et des integrals euleriennes (1827-1832) الذي لا يزال عملاً ذا مستوى قياسي وكتابه "مبادئ الهندسة" Elements de geomtrie (1794) الذي حطم فيه المثل الأفلاطونية لإقليدس مقدماً كتاباً دراسياً في الهندسة الابتدائية قائماً على متطلبات التعليم الحديث حيث تتالت طبعاته وترجم إلى لغات عدة ولا يزال أثره باق.

٤

ربما تعود بدايات العصر الجديد لتاريخ الرياضيات الفرنسية مع تأسس المدارس العسكرية والأكاديميات التي أخذت مكانها أثناء الجزء الأخير من القرن الثامن عشر. هذه المدارس التي تأسس بعضها خارج فرنسا (تورين Turin وَوولوِج Woolwich) أولت اهتماماً واعتباراً لتدريس الرياضيات باعتبارها جزءاً من تدريب المهندسين العسكريين. بدأ لاكرانج Lagrange مهنته في المدرسة العسكرية بتورين و لجندر Legendre ولابلاس Laplace درسا في المدرسة العسكرية في باريس، وَمونج Monge في ميزريس Mézières، وَكارنو Carnot كان رئيس المهندسين.

يعود تاريخ اهتمام نابليون بالرياضيات عندما كان طالباً في الأكاديمية العسكرية في برينه Brienne وباريس. بات الأمر ملحاً إلى تعليمات مركزة في الهندسة العسكرية عندما اجتاحت الجيوش الملكية فرنسا، مما أدى إلى تأسس المدرسة التقنية Polytechnique [متعددة الفنون: لها علاقة بتدريس كثير من الفنون التقنية أو العلوم التطبيقية] في عام 1794، المدرسة التي سرعان ما غدت مؤسسة رائدة لدراسة الهندسة بوجه عام، وأخيراً أصبحت نموذجاً لكل كليات الهندسة والمدارس العسكرية في بدايات القرن التاسع عشر ومن ضمنها المنطقة الغربية للولايات المتحدة.

كان التعليم النظري والتطبيقي للرياضيات باعتباره جزءاً مكملاً للمنهاج الدراسي، وكان التركيز منصباً على البحوث والتدريس في آن، مما دفع أفضل علماء فرنسا إلى أن يوجهوا دعمهم للمدرسة، فكان معظم الرياضياتيين الفرنسيين طلاباً وأساتذة أو ممتحنين في المدرسة التقنية[1].

كان التدريس في هذه المؤسسة كما هو جار في المدارس التقنية الأخرى يتطلب كتاباً دراسياً من نوع جديد، ويبدأ التعليم للمبتدئين بصور نمطية أي كما كان متداولاً في عصر آويلر أي ملحقاً بكتيبات الكلية الدراسية. ولقد أعدت أفضل الكتب الدراسية لبداية القرن التاسع عشر في المدرسة التقنية أو المؤسسات المشابهة ولا تزال آثارها موجودة في مقرراتنا الحالية، وأفضل مثال على ذلك المرجع الذي ألفه فرنسوا لكرو Sylvestre-Francois Lacroix من جزأين والموسوم Traite due calcul differential et du calcul intégral (1797)، حيث تعلم منه الأجيال حساب التفاضل والتكامل.

وكما سبقت الإشارة إلى كتب لجندر ومثال آخر ساطع هو كتاب مونج للهندسة الوصفية الذي لا يزال مصدراً غنياً لهذا الموضوع حتى وقتنا الحاضر.

5

كان غاسبار مونج Gespard Monge مديراً للمدرسة التقنية ورائداً علمياً لمجموعة من الرياضياتيين المقيدين بالمؤسسة، بدأ مهنته كمدرس في الأكاديمية العسكرية بمدينه ميزريه Mezieres في الفترة 1768-1789، وكانت محاضراته المتعلقة بالحصن قد منحته فرصة لتطوير الهندسة الوصفية باعتبارها فرعاً للهندسة. نشر مونج محاضراته

1- قارن C.G.J.Jacobi, Werke, vol.7, p.355 (عقدت المحاضرة في 1835). خلقت المدرسة التقنية مادة لكثير من الدراسات مرتبطة بدورها في بلورة الرياضيات لبداية القرن التاسع عشر لكلا البحوث والتدريس. قارن بهذا الصدد H.Wussing, Pädagogik, vol.13, pp642-62 (1958) وللخلفية انظر M.P.Crosland, The Society of Arcueil (Cambridge, Mass, 1967)، مكان إقامة لابلاس في Arcueil بالقرب من باريس من 1806 إلى 1813 كان مركزاً اجتماعياً علمياً.

تحـت عنـوان (1795-1799) Géométrie descriptive. وفي ميزريـه بـدأ بتطبيـق حسـاب التفاضل والتكامل على منحنيات الفضاء والسطوح، حيث صدرت أوراقه البحثية حول هـذا الموضوع وفيما بعد تحت مسمى (1809) Application de l'analyse a la géométrie وهـو أول كتـاب في الهندسـة التفاضـلية رغـم أنـه لم يكـن بالـصورة المعتـادة في وقتنـا الحاضر.

يعتبر مـونج مـن أوائـل الرياضـياتيين الحـديثين الـذي يعـرف كمتخـصص: هندسي - حتى في معالجته لمعادلات التفاضل الجزئي ويتمتع بلمسة وروح هندسية متميـزة. بـدأت الهندسـة تزدهـر في المدرسـة التقنيـة عـبر تـأثير مـونج، وفي هندسـته الوصـفية تكمـن نـواة الهندسـة الإسـقاطية وإتقانـه للأسـاليب الجبريـة والتحليليـة والهندسة التفاضلية.

طوّر جين هاشات Jean Hachette وَجـين بـابتس بيـو Jean-Baptiste Biot الهندسـة التحليليـة للقطـع المخروطيـة والتربيعيـة، ففـي مقالـة لبيـو Biot الـصادرة في 1802 تحـت عنـوان Essai de géométrie نتعـرف أخـيراً علـى كتبنـا الدراسـية الحاليـة للهندسـة التحليلية. طبق دوبن Dupin مهندس البحرية الشاب في العصر النابليوني طرائق أستاذه في نظريـة الـسطوح حيـث توصـل إلى خطـوط تقاربيـة ومرافقـة. أصبح دوبـن أسـتاذاً للهندسة في باريس وفي أثناء فترة حياته الطويلة كسب شهرة واسعة باعتبـاره سياسـياً ومطـوّراً صـناعياً أيضاً. تـذكّرنا المفـردات الـتي تحمـل اسمـه "Indicatrix of Dupin" و "Cyclides of Dupin" باهتمامـات هـذا الرجـل المبكـرة حيـث يحتـوي عمـلاه (1825) Applictions de géométrie (1813) Dévelppements de géométrie على عـدد من النتائج الرائعة والمشوقة.

يعتبر فكتـور بونـسليه V.Poncelet أكثر طلاب مونج إخلاصاً، وهـو الـذي سنحت له الفرصة أن يوضّح أساليب أستاذه أثنـاء إقامتـه كسجين حـرب معـزولاً في روسـيا في عـام 1813 بعـد هزيمـة جـيش نـابليون العظيم. كـان بونـسليه مـشدوهاً بالجانب التركيبي البحت لهندسـة مـونج، وهكـذا انقـاد إلى نمـط من التفكير تم اقتراحـه قبـل قـرنين أي قبـل ديسـارغ Desargues، مـن هـذا المنطلق أصبح بونـسليه مؤسس الهندسة الإسقاطية.

ظهر عمل بونسليه الموسوم Traité des properetes projectives des figures في عام 1822، ويحتوي هذا المجلد الضخم على جميع المفاهيم الأساسية المتضمنة في الشكل الجديد للهندسة، مثل نسبة التقاطع والمنظورية والإسقاطية والمنشأ وحتى النقط الدائرية في اللانهائية. كان بونسليه على علم بأن بؤر المخروطيات يمكن اعتبارها تقاطعات للمماسات في المخروطيات عبر هذه النقط الدائرية.

تحتوي الأطروحة أيضاً على نظرية المضلعات المحاطة بمخروط واحد ومحاطة بآخر (تسمى هذه "المسألة المقفلة" لبونسليه)، كما يعتبر هذا الكتاب أول أطروحة في الهندسة الإسقاطية أثناء العقود المقبلة، حيث وصلت هذه الهندسة درجة من الكمال مما جعلها مثالاً كلاسيكياً لبنية رياضياتية متكاملة تماماً.

6

ورغم أن مونج كان رجلاً صارماً لمبادئ الديمقراطية إلا أنه ظل مخلصاً لنابليون حيث وجد فيه الرجل الوصي لمثل الثورة، وفقد مونج وظيفته عندما عادت الأسرة المالكة الفرنسية عام 1815 وبعدها بقليل فارق الحياة. ومع ذلك استمرت المدرسة التقنية بالازدهار بنفحات روح مونج ولكن طبيعة التدريس حالت دون فصل الرياضيات البحتة عن التطبيقية. أما الأنظار فقد وجهت كاملاً إلى الميكانيك وبدأت الفيزياء الرياضياتية تتحرر وتشق طريقها عن مفهومي القدماء حول الانكساريات [dioptrics: فرع من البصريات يبحث في قوانين انكسار الضوء] والانعكاسات catoptrics.

اكتشف إتيه مالوس E.Malus بلورة الضوء في عام 1810 وأعاد أوغستين فرزنل A.Fresnel تأسيس نظرية هويجنز Huygens غير الثائية للضوء عام 1821 وقام أندريه أمبير A.Ampere بأعمال متميزة حول معادلات التفاضل الجزئي، وأصبح بعد عام 1820 رائداً عظيماً في الكهرومغناطيسية. جلب هؤلاء الباحثون الكثير من الفوائد المباشرة وغير المباشرة للرياضيات: أحد هذه الأمثلة هو تطوير دوبن لهندسة مالوس لأشعة الضوء التي ساعدت في تحديث الضوء الهندسي وأسهمت أيضاً في هندسة الخطوط المتطابقة.

درس كتاب لاكرانج "تحليل الميكانيك" دراسة متأنية ومتمعنة وفحصت وطبقت أساليبه، فالاستاتيك يدين إلى مونج وتلامذته بسبب ما يحمله من احتمالات هندسية، وظهرت كتب دراسية عديدة في الاستاتيك على مدى سنوات، أحدها كتاب مونج نفسه لعام 1788 الذي صدرت منه طبعات كثيرة. ولكن جاء لويس بونسو L.Poinsot بحذافير العنصر الهندسي للاستاتيك وشاهد على ذلك كتاباه "مبادئ الاستاتيك" (1804) Eléments de statique و "النظرية الجديدة حول دوران الأجسام" (1834) Théorie nouvelle de la rotation des corps بالإضافة إلى مفهوم القوة باعتبارها لي Torque (ازدواج couple)، مقدماً نظرية آويلر لعزوم القصور الذاتي (عطالة)، وذلك عن طريق القصور الذاتي للأجسام الإهليليجية وتحليل حركة هذه الأجسام عندما يتحرك الجسم الصلب في الفضاء أو يدور حول نقطة ثابتة. لقد أعطى كلا بونسو وَكوريولي Coriolis لمسة هندسية إلى الميكانيك التحليلي و لـ لاكرانج، كلا الرجلين وَبونسليه أكدوا تطبيق الميكانيك في نظرية الآلات البسيطة. يظهر "تسارع كوريولي" عندما يتحرك جسم ما في منظومة تسارعية، وهو مثال حي للتفسير الهندسي لنتائج لاكرانج (1835).

ومن الرياضياتيين الأكثر تميزاً والمرتبطين بالمدرسة التقنية في سنواتها الباكرة - بصرف النظر عن لاكرانج ومونج - سيمون بواسون S.Poisson وَجوزيف فورييه J.Fourier، وَأغوستن كوشي A.Cauchy، وجميع هؤلاء الثلاثة كان جل اهتمامهم منصباً في تطبيق الرياضيات في الميكانيك والفيزياء، وتوصل الثلاثة أيضاً إلى اكتشافات في الرياضيات "البحتة" نتيجة هذا الاهتمام.

تمثلت إنتاجية بواسون بتواتر اسمه على كتبنا الدراسية منها: حواصر[1] بواسون في المعادلات التفاضلية و "ثابت بواسون" في المرونة و "تكامل بواسون" و "معادلة بواسون" في نظرية الجهد. تعتبر معادلة بواسون $\Delta V= 4\pi\rho$ نتيجة لاكتشافه في عام 1812 أن معادلة لابلاس $\Delta V=0$ تحفظ فقط خارج الكتل، وبرهانها الدقيق لكتل متغير الكثافة لم يدل به إلا عندما أدلى به غاوس في عمله الموسوم Allgemeine Lehrsätze

1- جمع حاصرة، اي واحدة من زوجين من الرموز تستخدم لتحصر عدداً من الأشياء ينظر اليها على انها تشكل تعبيراً واحداً.- (المترجم)، انظر الأشهر، علي "معجم الرياضيات" - أكاديميا.

(1839-1840). احتوى عمل بواسون الموسوم Traité de mécanique الذي كتب في عام 1811 بروح لاكرانج ولابلاس على الكثير من الإبداعات مثل الاستخدام الواضح لإحداثيات التصادم والذي يعبر عنه $p_i = \partial T/\partial q_i$ والذي ألهم أعمال هملتون وَجاكوبي فيما بعد. ويحتوي كتاب بواسون لعام 1837 على "قانون بواسون" في نظرية الاحتمالات والذي تم اشتقاقه أساساً باعتباره تقريبياً لقانون ذي الحدين لبرنولي في حالة الاحتمالات الصغيرة، ولكن تم التيقن منه الآن باعتباره قانوناً أساسياً في المسائل المتعلقة بالإشعاع وحركة المرور وأي توزيع بصورة عامة (انظر الفصل السابع القسم 6).

يعرف فورييه أساساً باعتباره مؤلف "Théorie analytique de la chaleur" (1822)[1] "النظرية التحليلية للحرارة" وهذا في حد ذاته النظرية الرياضياتية للتوصيل الحراري ومن ثم دراسة جوهرية للمعادلة $\Delta U = k\partial u/\partial t$. ولغرض تعميم طريقته أصبح هذا الكتاب مصدراً لكل الطرائق الحديثة في الفيزياء الرياضياتية التي تقتضي تكامل معادلات التفاضل الجزئي في ظل شروط حدية boundary ما. تستخدم هذه الطريقة المتسلسلة المثلثاتية والتي كانت سبباً لنقاش دار رحاه بين آويلر وَدالمبر وَدانيال برنولي مما أتاح الفرصة لفورييه كي يجعل الوضع أكثر وضوحاً. لقد أسس فورييه واقع أن الدالة الاختيارية (الاعتباطية) (الدالة التي يمكن تمثيلها بتقوس لمنحن مستمر أو تقوسات تابعة) يمكن تمثيلها بمتسلسلة مثلثاتية تأخذ الشكل: $\sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos nax + B_n \sin nax)$

كانت الفكرة جداً جديدة ومروعة أثناء دراسة فورييه رغم ملاحظات آويلر وَبرنولي، وكما يقال عندما صرح بأفكاره لأول مرة عام 1807 لم يلق معارضة شديدة من أحد سوى لاكرانج نفسه.

غدت "متسلسلة فورييه" الآن أداة حادة وذات أساس قويم في عمليات نظرية معادلات التفاضل الجزئي في ظل شروط حدية، كما لاقت أيضاً انتباهاً بدرجة أفضل، وهكذا انفتح الباب على مصراعيه نتيجة معالجة فورييه الحاذقة عن ماذا يفهم "بالدالة". يعتبر هذا أحد الأسباب الذي دفع رياضياتي القرن التاسع عشر إلى

1- ترجم إلى The Analytic Theory of Heat من قبل الكسندر فريمان Freeman.

أن يجدوا من الضروري النظر عن كثب في المسائل المتعلقة بالبرهان الرياضياتي الدقيق وأسس المفاهيم الرياضياتية عموماً[1]، فهذه المهمة بالحالة الخاصة لمتسلسلة فورييه أخذت على عاتق درخليه وَريمان.

٦

كانت أكثر إسهامات كوشي في نظرية الضوء والميكانيك يشوبها نوع من الغموض مقارنة بالنجاح الذي أحرزته أعماله في التحليل، ولكن يجب ألا ننسى أنه مع نفير Navier ينتمي إلى مؤسس النظرية الرياضياتية للمرونة، حيث كان تألقه الرئيس هو نظرية الدوال للمتغير العقدي وإصراره الدائم حول الدقة والصرامة في التحليل.

والجدير بالذكر أن دالمبر d'Alembert سبق وأن قام بصوغ دوال المتغير العقدي التي تناولها في ورقته البحثية لعام 1752 حول مقاومة الموائع وتوصل إلى ما نعرفه اليوم بمعادلات كوشي - ريمان. وعلى يد كوشي تحررت نظرية الدالة العقدية من أداة طيعة في علم قوة الموائع hydrodynamics والديناميك الهوائي aerodynamics إلى مجال جديد قائم بذاته للبحث الرياضياتي.

ظهرت دراسات كوشي في هذا الموضوع بانتظام وعلى التوالي بعد عام 1814، وإن إحدى أوراقه البحثية هي Mémoire sur le intégrals définies,entre des limites imaginaries (1825) حيث ظهر فيها مبرهنة تكامل كوشي عن البواقي (الرواسب)، ومنطوق المبرهنة هو أن أي دالة منتظمة يمكن أن توسع حول كل نقطة $z=z_0$ في متسلسلة تقاربية لدائرة تمر عبر نقطة مفردة قريبة إلى $z=z_0$ ونشرت في 1831 العام نفسه الذي نشر غاوس نظريته الحسابية حول الأعداد العقدية.

نشر توسّع لورنت Laurent لمبرهنة كوشي حول المتسلسلات في 1843 - عندما وضع فيرشتراس يده عليه. توضح لنا هذه الحقائق أنه لا يحتم على نظرية كوشي التغلب على المقاومة الاحترافية، وأن نظرية الدوال العقدية تم قبولها بحذافيرها منذ ولادتها.

1- P.E.B.Jourdain, "Notes on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics Proc. Intern. Congress of Math., volII (Cambridge, 1912), pp526-27.

ينتمي كوشي ومعاصريه - غاوس وآبل وَبولزانو - إلى روّاد إصرار جديد يسعى إلى الدقة والصرامة في الرياضيات. ويمكن اعتبار القرن الثامن عشر عصر التجريب من حيث ما أمطر من نتائج وافرة وغزيرة. لم يعر رياضياتو هذه الحقبة انتباهاً كبيراً إلى أسس أعمالهم - وكما يقال على لسان دالمبر "تقدم إلى الأمام وسيأتيك الإيمان" allez en avant, et la foi vous viendra[1]. فعندما كانوا يقلقون بشأن الدقة والصرامة كما هو الوضع مع آويلر و لاكرانج، فإن حججهم لم تكن دائماً مقنعة. حان الوقت الآن للتركيز عن كثب حول معنى النتائج، ما هي "دالة" المتغير الحقيقي التي توضح مثل هذا السلوك المختلف في حالة متسلسلة فورييه وكذلك في حالة متسلسلة قوى؟ وما هي علاقتها إلى "دالة" مختلفة تماماً عن متغير عقدي؟ أحضرت مثل هذه الأسئلة مسائل غير محلولة حول أسس حساب التفاضل والتكامل ووجود اللانهائية الممكنة والفعلية إلى طليعة التفكير الرياضياتي[2]. إن ما فعله إيدوكس في الفترة التي تلت سقوط الديمقراطية الأثينية هو ما قام به كوشي ومعاصروه الأفذاذ من إنجاز في عصر المد الصناعي، وأنتجت هذه الفروق في الوضع الاجتماعي نتائج مختلفة؛ فبينما كان نجاح إيدوكس ذا نزعة تقيد الإنتاجية، فإن نجاح المصلحين المحدثين كان يحفز الإنتاجية الرياضياتية إلى درجة عالية، ونجد فيرشتراس وَكانتور يتبعان غاوس وَكوشي.

لقد أعطى كوشي أساس حساب التفاضل والتكامل كما هو معهود الآن في مقرراتنا الدراسية، ويمكن إيجاد ذلك في عمله الموسوم Cours d'analyse لعام 1821 و Résumé des leçons données á l'Ecole Royale Polytechnique (vol.I, 823) استخدم كوشي مفهوم النهاية لدى دالمبر كي يعرف مشتقة الدالة ثم قوّمها على أسس متينة ما لم يستطع أحد أن يفعل من قبله. وبدءاً بتعريف "النهاية" limit أعطى كوشي أمثلة مثل نهاية $\sin \alpha/\alpha$ عندما تكون $\alpha=0$، ثم عَرف المتغير اللامتناهي الصغر باعتباره عدداً متغيراً له القيمة صفر كنهاية له، ثم افترض كميات لانهائية في الصغر وكتبها كالآتي:

1- "Go forward and faith will come to you".
2- P.E.B.Jourdain, "The Origin of Cauchy's Conception of a Definite Integral and Of the Continuity of a Function," Isis, vol 1 (1913) ,pp.661-703 انظر ايضاً Bibl. Math, vol 6 (1905), pp.190-207.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

وسميت النهاية عندما $i \to 0$ مشتقة الدالة y' أو $f'(x)$ ووضع $i=\alpha h$ و α لانهائية في الصغر و h كمية متناهية:

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h$$

وسميت h تفاضل الدالة $y=f(x)$ وأيضاً $dy=df(x)$ وتساوي $hf'(x); dx=h$ [1].

استخدم كوشي رموز لاكرانج ومعظم إسهاماته في نظرية الدالة الحقيقية هي في واقع الأمر قد تخلو من أي تنازل تجاه أسس لاكرانج "الجبرية"، لذا تم قبول مبرهنة متوسط - القيمة وبواقي متسلسلة تايلور Taylor مع الأخذ بالحسبان اشتقاقات لاكرانج، رغم أن المتسلسلة أخذت على أساس تقاربيتها. ثمة براهين تقاربية عدة في نظرية المتسلسلة اللانهائية سميت بعد كوشي، كما نجد في أعماله مفهومنا الحديث عن الاستمرارية (الاتصال).

توجد خطوات محددة في مؤلفات كوشي حول "تحسيب" التحليل والذي أصبح فيما بعد ضمن دراسات فيراشتراس. أعطى كوشي أول برهان وجود لحل المعادلات التفاضلية وكذلك منظومة من هذه المعادلات (1836)، وفي السياق نفسه طرح كوشي أخيراً بداية لجواب حول قضايا المتسلسلات والمفارقات (المحيرات) التي كانت تجول في الفكر الرياضياتي منذ عصر زينو، وهكذا لم يقم برفضها أو تجاهلها بل بصوغ أسلوب رياضياتي قادر على إنصافها[2].

كان كوشي يشبه معاصره بلزاك Balzac (الذي يشاطره في كم الإنتاج الغزير) مخلصاً ورسمياً، كلا الرجلين يتمتعان بإدراك عميق للقيم على الرغم من المثل الرجعية ولذا تحتفظ أعمالهما بمكانة أساسية. لقد ترك كوشي منصبه في

1- Résumé,vol.I (1823),Chapter entitled" Calcul differntiel,"pp.13-27.

هناك تحليل قاطع لهذه الطريقة موجود في

M.Pash, Mathematik am Ursprung (Leipzig, 1927), pp47-73.

2- انظر مثلاً، الفصل 40

"The Installtion of Rigor in Analysis" in M.Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (New york,1972) و H.Freudenthal, DSB, vol.3 (1971), pp.131-48.

المدرسة التقنية بعد ثورة 1830 وقضى سنوات في تورين وَبراغ وبعدها عاد إلى باريس في عام 1838. فبعد عام سمح لكوشي أن يقيم ويدرس دون أن يؤدي قسم الولاء إلى الحكومة الجديدة، كانت إنتاجيته جداً هائلة لدرجة أن الأكاديمية الفرنسية قامت بحصر جميع أوراقه البحثية التي أرسلت إلى Comtes-Rendus لغرض مواكبة مخرجات كوشي. يقال إن لابلاس انزعج تماماً عندما قرأ كوشي ورقته الأولى حول تقاربية المتسلسلة، مما أجبر الرجل العظيم على العودة إلى منزله كي يتيقن من صحة المتسلسلة في كتابه "ميكانيك السماء" ولكنه لم يجد أي خطأ يذكر.

8

لقد أتاح وسط باريس المفعم بالنشاط الرياضياتي المكثف في العام 1830 تقريباً عبقرية من الدرجة الأولى شبيهة بالمذنب الذي يظهر فجأة ويختفي فجأة، إنه إيفارست غالوا E. Galois ابناً لمحافظ مدينة صغيرة بالقرب من باريس، رفض الالتحاق بالمدرسة التقنية ولكنه فاز أخيراً بالالتحاق بمدرسة نورمال Normale وطرد منها فيما بعد. عانى الاضطهاد على يد القائمين الرسميين للعلوم حيث رفضت إحدى أوراقه البحثية التي أرسلت للنشر إلى الأكاديمية من قبل كوشي، وفقد كتابه الجديد لغرض الحصول على الجائزة الكبرى، بينما تحاول روحه الجياشة الغيورة أن تحتفظ بين الاتزان الصعب وبغضه الشديد إلى المؤسسة وميوله إلى العلم والديمقراطية.

ساهم غالوا في ثورة 1830 باعتباره جمهورياً وقضى وقتاً في السجن وسرعان ما لاقى حتفه في مبارزة عن واحد وعشرين ربيعاً، نشرت بعض أوراقه البحثية بعيد وفاته وفي أمسية المبارزة كتب إلى صديق له خلاصة اكتشافاته في نظرية المعادلات وفي هذه الوثيقة المفعمة بالحزن يطلب من صديقه أن يسلم اكتشافاته إلى الرياضياتيين الروّاد والتي أنهاها بالكلمات الآتية:

> أناشدك أن تسأل جاكوبي أو غاوس جهراً بإدلاء أرائهما ليس حيال الحقيقة ولكن بصدد أهمية المبرهنات. كما أتمنى بعد ذلك أن يكون هناك من الناس من يجدها لصالحهم بحيث تفك لغز كل هذه الالتباسات.

يحتوي هذا "اللبس" على نظرية الزمر group theory، إنها مفتاح الجبر الحديث والهندسة الحديثة. لقد شرح لاكرانج والإيطالي روفيني Ruffini الأفكار من قبل إلى حد ما ولكن لم يكتمل مفهوم نظرية الزمر إلا عند غالوا نفسه. حيث عبّر غالوا عن الخواص الأساسية لتحويل الزمر المنتمية إلى جذور المعادلات الجبرية، كما وضّح أن مجال الأعداد النسبية (المنطقة) لهذه الجذور يمكن تحديده بزمرة.

أشار غالوا إلى الوضع المركزي المأخوذ من الزمر الجزئية غير المتغيرة، أما المسائل القديمة مثل تقسيم الزاوية ومضاعفة المكعب وحل المعادلة التكعيبية والرباعية وكذلك حل المعادلات الجبرية لأي درجة وجدت مكانها الطبيعي في نظرية غالوا.

وكما نعلم فإن خطاب غالوا لم يسلم قط إلى جاكوبي أو غاوس ولم يصل إلى معشر الرياضياتيين إلا عندما نشر لوفلي Liouville معظم أوراق غالوا في دوريته الرياضياتية Journal de mathématiques لعام 1846 في الفترة التي بدأ فيها غاوس ينشر أعماله حول نظرية الزمر (1844-1846)، عندها بدأ اهتمام الرياضياتيون بنظرية غالوا عبر عمل كميل جوردن Camille Jordan الموسوم Traité des substitutions لعام 1870 وإصدارات كلاين Klein ولي Lie المتتابعة، كما تم الاعتراف الآن بمبدأ غالوا الموحّد كأحد الإنجازات المتميزة لرياضيات القرن التاسع عشر[1].

كانت لدى غالوا أفكار حول تكاملات الدوال الجبرية لمتغير واحد والذي نسميه الآن التكاملات الأبيلية Abelian integrals، مما يجعل أسلوب غالوا في التفكير قريباً إلى ريمان. وبوسعنا أن نتكهن حول إمكانية إذا ما قدر لغالوا البقاء على قيد الحياة مدة أطول فعندئذ سوف تستلهم الرياضيات الحديثة إيحاءها العميق من باريس ومدرسة لاكرانج عوضاً عن غوتنجن ومدرسة غاوس.

1- G.A.Miller, History of the Theory of Groups to 1900. Collected Works, Vol.I (1935), pp.427-67; H.Wussing, Die Genesis des abstrakten Grupenbeegriffes (Berlin, 1969); on Jordan, H.Lebesgue, Notices des mathématiques (Geneva,1958), pp.40-65.

9

ظهر عبقري آخر شاب في العشرينيات من العمر، إنه نيلز هينرك آبل Niels Henrik Abel ابن وزير دولة نرويجي، وكانت حياته القصيرة مأساوية كما هو الحال مع غالوا، ولكونه طالباً في كرستينا فقد كان تصوره لفترة بأنه توصل إلى حل معادلة الدرجة الخامسة ولكن راجع نفسه في مسودة نشرت في 1824. تعتبر هذه أشهر ورقة بحثية توصل إليها آبل من حيث برهانه حول استحالة حل المعادلة الخماسية بصورة عامة بواسطة الجذور - هذه المسألة التي شغلت بل حيّرت عقول الرياضياتيين منذ عصر بومبلي Bombelli وَفيت Viète (أخذ بواسون ورياضياتيون آخرون البرهان الذي تقدم به الإيطالي باولو روفيني Paolo Ruffini على أنه غامض).

حصل آبل على مرتب يؤهله للتنقل إلى برلين وإيطاليا وفرنسا ولكن حياته المعذبة بالفقر والعوز حالت دون إيجاد مكانة مرموقة لهؤلاء الموهوبين، ومع ذلك استطاع أن يوّطد علاقاته مع بعض الشخصيات الرياضياتية، ولكن الموت فاجأه في عام 1829 بعد عودته إلى مسقط رأسه وهي اللحظة التي بدأت عظمته بالاعتراف من قبل لجندر وَجاكوبي وَغاوس.

كتب آبل أثناء تنقله عدداً من الأوراق البحثية التي تحتوي على أعماله حول تقاربية المتسلسلة و "التكاملات الأبيلية" والدوال الإهليليجية. توضح مبرهنات آبل في نظرية المتسلسلات اللانهائية أنه قادر على تأسيس نظرية ذات أسس معتمدة. فهل بإمكانك أن تتصور أكثر هولاً من أن يزعم أن ...+0=1n-2n+3n-4n حيث n هو عدد صحيح موجب؟ وكتب آبل إلى صديق له الآتي:

من الصعب أن تجد في الرياضيات متسلسلة لانهائية واحدة بحيث يحدد المجموع بأسلوب دقيق (رسالة إلى هولمبو Holmboe، 1826).

درست أعمال آبل المتعلقة بالدوال الإهليليجية بشيء من الاختصار والمثيرة بالمنافسة مع جاكوبي. وتوصل غاوس في ملاحظاته الخاصة إلى أن التكاملات

الإهليلجية العكسية تؤدي إلى قيمة - أحادية ودوال دورية مضاعفة، ولكن لم ينشر أفكاره قط. ومن جانب آخر أولى لجندر جهداً كبيراً حول التكاملات الإهليلجية، ولكن فاتته هذه النقطة ولم تخطر على باله إطلاقاً رغم أنه كان متأثراً حتى النخاع باكتشافات آبل حتى في شيخوخته.

كان آبل محظوظاً عندما وجد الدورية الجديدة وكان متلهفاً لطباعة بحوثه، فأول مجلد من الدورية Journal für die reine und angewandte Mathematik قام بتحريره كريل Crelle احتوى على خمس أوراق بحثية على الأقل وظهر الجزء الأول من عمله المتعلق بالدوال الإهليلجية Recherches sur les fonctions elliptiques في المجلد الثاني لعام 1827 وبه تبدأ نظرية الدوال الدورية المضاعفة.

أوغوست ليبولد كريل A.L.Crelle مهندس معماري ومخطط لأول سكة حديدية في بروسيا ولا يزال يعرف عبر عمله الموسوم Rechentafeln لعام 1820 وباعتباره أيضاً مؤسساً للدورية Journal für die reine und angewandte Mathematik (1826) التي لا تزال موجودة، واحدة من أولى الدوريات التي تعنى بالرياضيات البحتة، حيث كان كريل يشجع ويثير الحماس عند الرياضياتيين الشبان أمثال آبل وَشتاينر Steiner. أخذت الدورية مسماها من حولية غيرغون Gergonne الموسومة Annales de mathématiques pures et appliqués (وبعد عام 1836 سميت ...Journal، انظر القسم 16 من هذا الفصل).

ويقصد بمعادلة تكامل آبل مبرهنة آبل حول مجموع تكاملات الدوال الجبرية التي تؤدي إلى دوال أبيلية، وأن الزمر التبديلية تسمى أبيلية لأنها توضح مدى قوة ارتباط أفكار غالوا مع أفكار آبل.

10

في العام الذي توفي فيه آبل، نشر كارل غوستاف جاكوب جاكوبي Carl Gustav Jacob Jacobi عمله الموسوم Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum "الأسس الجديدة لنظرية الدالة الإهليلجية". المؤلف

شاب وأستاذ في جامعة كونسبيرغ، ابن مصرفي من برلين وعضو لأسرة مرموقة وأخوه موريتس من مواطني سانت بطرسبيرغ ومن علماء روسيا الأوائل الذي كانت له تجارب عملية في الكهربائية، فبعد أن درس جاكوبي في برلين قام بالتدريس في كونسبيرغ من 1836 إلى 1843 ثم قضى وقتاً في إيطاليا ليتعافى من وعكاته الصحية، وأخيراً أنهى مهنته كأستاذ في جامعة برلين وتوفي في عام 1851 عن ستة وأربعين عاماً. كان جاكوبي حاذقاً ومفكراً متحرراً ومدرساً ملهماً وعالماً يتمتع بطاقة هائلة وصفاء ذهني لم يترك إلا النزر القليل من فروع الرياضيات التي لم يقدم عليها.

أقام جاكوبي نظريته للدوال الإهليليجية على دوال أربع تم تعريفها بالمتسلسلة اللانهائية وسميت "دوال ثيتا theta". فالدوال الدورية المضاعفة sn u و cn u و dn u هي خوارج قسمة دوال ثيتا، وهي تحقق مطابقات معينة ومبرهنات الجمع وشبيهة تماماً بدوال الجيب والجيب تمام المعروفة في حساب المثلثات. ويمكن اعتبار مبرهنات الجمع للدوال الإهليليجية بأنها تطبيقات خاصة لمبرهنة آبل المتعلقة بمجموع تكاملات الدوال الجبرية. والسؤال المطروح الآن هل بالإمكان أن تقلب التكاملات الإهليليجية الزائدة بالأسلوب نفسه الذي يتم فيه قلب التكاملات الإهليليجية لتعطي دوالَّ إهليليجية؟ لقد وجدت الإجابة عند جاكوبي في عام 1832 عندما نشر نتائجه التي تفصح على أن التعاكس يمكن القيام به بدوال أكثر من متغير واحد، ومن هنا ولدت نظرية الدوال الأبيلية للمتغيرات p، والتي غدت فرعاً لرياضيات القرن التاسع عشر.

أطلق سيلفستر Sylvester مصطلح "جاكوبين Jacobian" على المحددة الدالية تكريماً لأعمال جاكوبي في الجبر ونظرية الحذف، ويعتبر عمل جاكوبي الموسوم De formatione et proprietatibus determinantium (1841) أفضل أبحاثه في هذا الموضوع والذي جعل نظرية المحددات خاصية مشتركة للرياضياتيين، رغم أن فكرة المحددات أقدم من ذلك - يعود تاريخها بدرجة أساسية إلى ليبنتز (1693) والرياضياتي السويسري غابرييل كرامر G.Cramer (1750) والرياضياتي الياباني سيكي كوا Seki Kowa الذي كانت لديه فكرة

المحددة قبل عام 1683[1]. ويذكرنا هنا بأساليب "المصفوفة" التي طوّرها الرياضياتيون الصينيون في عصر سونغ والتي درس أعمالهم سيكي.

قد يكون أفضل منحى إلى جاكوبي عبر محاضراته الجميلة حول الديناميك والمعنونة Vorlesungen über Dynamik لعام 1866 والتي أعدها بعد محاضرات 1842-1843. كتبت هذه المحاضرات بالأسلوب التقليدي الفرنسي على نمط مدرسة لاكرانج وَبواسون ولكنها تتمتع بأفكار جديدة وغنية. وهنا نجد دراسات جاكوبي في معادلات التفاضل الجزئي ذات الرتبة الأولى وتطبيقاتها على المعادلات التفاضلية للديناميك، وأن أحد الفصول المشوقة في العمل المذكور هو تحديد المتقاصر على المجسم الإهليليجي والذي قاد إلى مسألة العلاقة بين تكاملين أبليين.

II

قادتنا محاضرات جاكوبي في الديناميك إلى رياضياتي آخر غالباً ما يكون اسمه مرتبطاً بجاكوبي. إنه وليم روان هملتون W.R.Hamilton (و يجب ألا يكون هناك التباس مع وليم هملتون الفيلسوف الاسكتلندي). عاش هملتون طوال حياته في دبلن وينحدر من أبوين إيرلنديين وهناك التحق بكلية الثالوث (ترنيتي Trinity)، ثم أصبح فلكياً تابعاً للبلاط الملكي في عام 1837 عندما كان له من العمر واحداً وعشرين عاماً وظل في منصبه حتى وفاته في 1865.

تعلم هملتون في صباه الرياضيات القارية [أي الأوروبية التي لها علاقة بأوروبا باستثناء الجزر البريطانية] - لا يزال حتى الآن من الأمور غير المألوفة في المملكة المتحدة - وعند دراسته لـ كلاريه Clairaut و لابلاس أظهر إتقانه للأساليب الجديدة في أعماله الأصيلة والمتميزة في الضوء والديناميك. ونظريته للأشعة الضوئية لعام

1- Y.Mikami, "On the Japanese Theory of Determinants," Isis,vol.2(1914),pp.9-36
وفقاً إلى J.Needham Science and Civilization in China, vol.III (Cambridge, 1959), p.117
وافضل قراءة لسيكي تاكاكوسو Seki Takakusu. كتب في الحلول العددية للمعادلات الجبرية ذات الدرجة n وتقويم القوس الدائري. وإن مقالة DSB تلفظ اسم سيكي تاكاكوجو S.Takakazu ويبدو هنا تأثير التقليد الصيني جلياً في رياضياته

1824 كانت بمثابة هندسة تفاضلية لخط التطابقات فحسب وكذلك نظريته عن الأدوات الضوئية التي سمحت لهملتون أن يتنبأ بالانكسارات المخروطية للبلورات ذات المحورين (ثنائية المحور). ظهرت في ورقة هملتون "دالته الخصائصية" التي أصبحت فكرة مرشدة "للطريقة العامة في الديناميك" لعام 1834-1835.

كانت فكرة هملتون هي اشتقاق كل من الضوء والديناميك من مبدأ عام واحد، كما وضّح آويلر في دفاعه عن موبيرتوس Maupertuis كيف يمكن للقيمة الساكنة أن تخدم عمل التكامل لهذا الغرض، وتوافقاً مع اقتراح هملتون أصبح الضوء والديناميك أفقين لحساب التغيرات، علماً أنه كان يسعى إلى القيمة الساكنة لتكامل معين ثم اعتبرها كدالة لنهاية، وهذا في حد ذاته "خصائصية" أو "مفهوم" "دالة" يحقق معادلتين تفاضليتين جزئيتين، وتكتب إحدى معادلات التفاضل الجزئي كالآتي:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q) = 0$$

والتي تم انتقاؤها من محاضرات جاكوبي في الديناميك وتعرف الآن بمعادلة هملتون - جاكوبي. ولقد ضلل هذا أهمية دالة هملتون الخصائصية التي كانت لها مكانة رئيسة في نظريته لكونها وسيلة لتوحيد الميكانيك والفيزياء الرياضياتية. أعاد اكتشافها فلكي من ليبتزغ Leipzig هو هاينريش برونز H.Bruns في 1895 في حالة علم الضوء الهندسي وباعتبار أن eikonal آيكونل وضح استخدامها في نظرية الأجهزة الضوئية.

إن الجزء الذي شق طريقه في الرياضيات بوجه عام من أعمال هملتون في الديناميك هو بالدرجة الأولى الصورة "القانونية" $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ من حيث ما كتبه من معادلات في الديناميك. إن الصورة القانونية ومعادلة هملتون - جاكوبي التفاضلية قد ساعدت لي Lie في أن يؤسس العلاقة بين الديناميك والتحويلات المتصلة، وهناك فكرة أخرى لهملتون مسلم بها تماماً هي اشتقاق قوانين الفيزياء والميكانيك عن طريق تغيير التكامل. لقد أسست النسبية الحديثة وكذلك ميكانيك الكموم جوهرهما على "دوال هملتون" باعتبارها مفهوماً أساسياً.

كان عام 1843 بمثابة انعطاف في حياة هملتون، ففي ذلك العام توصل إلى الأعداد الرباعية العقدية quaternion [عبارة عن عدد عقدي x معمم مكون من أربعة مركبات حيث إن $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ و x_i هي أعداد حقيقية و i و j و k أعداد فوق عقدية hypercomplex تحقق $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$] الدرس الذي قضى فيه جل حياته. سوف نتناول هذا الاكتشاف بشيء من التفصيل فيما بعد.

12

لقد كان ارتباط بيتر ليوني درخليه P.Lejeune Dirichlet بغاوس وَجاكوبي حميماً وكذلك بالرياضياتيين الفرنسيين، وقضى فترة من 1822 إلى 1827 مدرساً خاصاً والتقى بفورييه ودرس كتابه بتأن وتمعن وكذلك أصبح متأقلماً مع كتاب غاوس "دراسات الحساب" وفيما بعد درس في جامعة بريسلو Bresalu، وفي عام 1855 خلف غاوس لتبوؤ منصبه في غوتنجن، ولكن معرفته الشخصية برياضيات الفرنسيين والألمان وكذلك بالرياضياتيين جعلت منه الشخص المناسب ليكون شارحاً لأعمال غاوس والمذعن لمتسلسلة فورييه لغرض الغوص في التحليل الرياضياتي.

إن عمل درخليه الرائع والموسوم Vorlesungen über Zahlentheorie "مقدمة حول نظرية الأعداد" لعام 1863 لا يزال يعد واحداً من أفضل المقدمات لدراسات غاوس في نظرية الأعداد، كما يحتوي هذا العمل على الكثير من النتائج الجديدة. لقد بيّن درخليه في ورقته البحثية لعام 1840 كيفية تطبيق قوة نظرية الدوال التحليلية في مسائل نظرية الأعداد، ولقد أدخل درخليه في هذه الدراسات "متسلسلة درخليه" ووسّع أيضاً مفهوم الأعداد الصم (غير النسبية) التربيعية إلى المجال الجبري العام للعدد النسبي.

أعطى درخليه برهاناً دقيقاً لتقاربيه متسلسلة فورييه وبهذا الأسلوب أسهم في تصحيح فهم طبيعة الدالة[1]، وأدخل أيضاً على حساب التغيرات ما يسمى بمبدأ

1- A.F.Monna, "The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions Between Baire, Borel and Lebesgue," AHES,Vol.9 (1972), pp.51-84.

درخليه الذي يفترض وجود الدالة التي تقلل التكامل $\int(v_x^2+v_y^2+v_z^2)d\tau$ في ظل شروط حدّية ما. إنه في واقع الأمر تعديل للمفهوم الذي أدخله غاوس في نظريته للجهد للعام 1839-1840، وفيما بعد استفاد منه ريمان كأداة فعالة لحل مسائل نظرية الجهد. وكما سبقت الإشارة إلى أن هلبرت وطّد بدقة صارمة صلاحية هذا المفهوم (انظر أعلاه القسم 2)[1].

13

يعتبر برنارد ريمان B. Riemann خليفة درخليه في غوتنجن حيث نصل إلى رجل كان له الأثر الكبير في مسار الرياضيات الحديثة أكثر من أي رجل آخر. ريمان هو ابن لوزير دولة درس في جامعة غوتنجن وحصل فيها على درجة الدكتوراه في عام 1851 وفي 1854 أصبح محاضراً وأستاذاً في 1859 في الجامعة نفسها. كان معلولاً مثل آبل حيث قضى آخر أيامه في إيطاليا وتوفي فيها عام 1866 عن أربعين عاماً من العمر، ولم يستطع أن ينشر في حياته القصيرة إلا النزر اليسير من الأبحاث ولكن كل منها له أهميتها وعدد منها فتح آفاقاً جديدة.

في عام 1851 ظهرت أطروحة ريمان للدكتوراه المتعلقة بنظرية الدوال العقدية $u+iv=f(x+iy)$، فهو لا يختلف عن دالمبير وَكوشي وكان تأثيره جلياً في دروس ديناميك الموائع، حيث استطاع أن يقيم مطابقة المستوى - xy تشاكلياً على المستوى - uv وأسس وجود الدالة القادرة على تحويل أي حيز متصل على مستوى آخر، وقاده هذا إلى مفهوم ريمان حول السطوح الذي تم تقديمه إلى التحليل على هيئة اعتبارات تبولوجية. كان التبولوجيا آنذاك فرعاً بكراً لم يمس بعد حيث نشر لستنج J.B.Listing ورقته البحثية في Studien Gottinger (1847) ولكن ريمان وضّح أهميتها الأساسية لنظرية الدوال العقدية، كما بينت الأطروحة أيضاً تعريف ريمان للدالة العقدية: إن جزأيها الحقيقي والتخيلي لا بد وأن يحقق "معادلات كوشي - ريمان" $u_x=v_y, u_y=-v_x$ لأي حيّز (منطقة) regionl: مجموعة جزئية مترابطة في

1- A.F.Monna, Dirichlet's Principle (Utrecht,1975).

فضاء ثنائي البعد] وعلاوة على ذلك يجب أن تحقق شروطاً معينة كما هو للحدّية والمتفردات singularities.

طبق ريمان أفكاره المتعلقة بالدوال الأبيلية وفوق الهندسية في عام 1857 مستخدماً مبدأ درخليه (كما يسميه هو). ومن بين نتائجه اكتشافه للنوع genus [هو قياس لترابط سطح مغلق يساوي 1-k/4π من أجل k تكامل التقوس الغاوسي] لسطح ريمان باعتباره تبولوجيا غير متغير وكوسيلة لتصنيف الدوال الأبيلية. فبعيد وفاته نشرت ورقة بحثية طبقت أفكاره على السطوح الأصغرية في 1867. ينتمي نشاط ريمان إلى هذا الفرع المعرفي إلى دراساته حول الدوال - المقاسية الإهليليجية ومتسلسلة - θ لعدد من المتغيرات المستقلة وكذلك المتعلقة بالمعادلات التفاضلية بالعوامل الجبرية.

أصبح ريمان محاضراً في 1850 عندما تقدم بورقتين أساسيتين أحدهما في المتسلسلة المثلثاتية وأسس التحليل والأخرى في أساسيات الهندسة. عالجت الورقة الأولى تحليل شروط درخليه لتوسع الدالة في متسلسلة فورييه، وأحد هذه الشروط هو أن تكون الدالة "قابلة للتكامل"، ولكن ما المقصود بهذا؟ لقد أعطى كل من كوشي ودرخليه إجابات معينة ولكن استبدلها ريمان بإجابات أكثر شمولية. أعطى ريمان التعريف الذي نعرفه اليوم "تكامل ريمان" Riemann integral ولم يستبدل إلا في القرن العشرين إلى تكامل ليبيغ Lebesgue integral. لقد وضّح ريمان كيف تعرف الدوال بمتسلسلة فورييه وقد تكشف خواصاً باعتبارها تمتلك عدداً لانهائياً من الأعظميات والأصغريات والتي لم يأخذ بها الرياضياتيون الأوائل عند تعريفهم للدالة، وهكذا بدأ مفهوم الدالة يتحرر شيئاً فشيئاً من عمل آويلر الموسوم Curva quaecunque libero manus ductu descripta[1].

لقد أعطى ريمان في محاضراته مثالاً على الدالة المستمرة دون الخوض في الاشتقاقات، كما أعطى فيرشتراس مثالاً لهذه الدالة نشر في 1875. هناك من الرياضياتيين الذين أبدوا تحفظاً حيال هذه الدوال ولذا لم تؤخذ محمل الجد، وأطلق عليها دوال "معلولة" ولكن التحليل الحديث كشف عن صحة

1- "Some curve described by freely leading the hand" (Inst. Calc. integr., vol.III, §301).

هـذه الـدوال وكـم هـي طبيعيـة وكيـف غـاص ريمـان في مجـال أساسـي في الرياضيات.

تعالج الورقة الأخرى لعام 1854 فرضيات تتعلق بأسس الهندسة وإن الفضاء الذي تم إدخاله عبارة عن منطوية تبولوجية لعدد اعتباطي من الإحداثيات، وهكذا عرّفت المترية (القياسية) metric بهذه المنطويات عن طريق الصورة التربيعية التفاضلية. نجد هنا ريمان في تحليله يعرف الدالة العقدية بسلوكها الموضعي، كما يعرف أيضاً في هذه الورقة خاصية الفضاء (المكان) بالأسلوب نفسه، وإن مفهوم ريمان الموحد يقدم يد العون ليس في تصنيف أنماط الهندسة الموجودة ومن ضمنها الهندسة اللاإقليدية المبهمة، بل يسمح له بالقيام بأي عدد من الأنماط الجديدة للفضاء، وللعلم فإن الكثير منها وجد مكانته في الهندسة والفيزياء الرياضياتية.

لقد نشر ريمان هذه الورقة من دون أساليب تحليلية مما جعل أفكاره بعيدة المنال، وفيما بعد ظهرت بعض الصيغ حول التوزيع الحراري على الأجسام الصلبة في مقالة لنيل جائزة قدمها ريمان للأكاديمية الفرنسية عام 1861، وهنا نجد مخططاً لنظرية التحويلات للصور التربيعية.

وآخر أوراق ريمان البحثية لعام 1859 التي يجب أن نذكرها هنا هي مناقشته للعدد $F(x)$ للأعداد الأولية أقل من أي عدد x. تعد هذه الورقة بمثابة تطبيق لنظرية العدد العقدي بالنسبة لتوزيع الأعداد الأولية، كما تناولت تحليل اقتراح غاوس المتعلق بتقارب $F(x)$ إلى تكامل لوغاريتمي $\int_2^x (\log t)^{-1} dt$. ضاع صيت هذه الورقة لكونها تحتوي على "فرضية ريمان" التي تنص على أن دالة زيتا لأويلر $\zeta(s)$ - هذا هو رمز ريمان - إذا ما أخذ العدد العقدي $s = x + iy$ فسيكون له أصفار غير حقيقية على الخط $x = \frac{1}{2}$. لم تبرهن ولم تدحض هذه الفرضية حتى يومنا هذا[1].

1- R.Courant, "Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre", Naturwissenschaften, vol. 14 (1926), pp.813-18; "برنارد ريمان ورياضيات المئة سنة الأخيرة" E.C.Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function (Oxford, 1951)*; H.H Edward, Riemann's Zeta Function (New York, 1974).

١٤

تمت مقارنة مفهوم ريمان لدالة المتغير العقدي مع تلك التي تناولها فيرشتراس، كان كارل فيرشتراس لسنوات عديدة مدرساً في الجمنزيم البروسي (gymnasia: يعني باللاتيني المدارس الثانوية) أصبح أستاذاً للرياضيات في جامعة برلين حيث درّس فيها لمدة ثلاثين عاماً، وكانت محاضراته معدة على نحو شديد ودقيق ومفصلة مما عجل من شهرته، فعن طريقها كانت أفكاره ميزة عامة للرياضياتيين.

كتب فيرشتراس العديد من الأوراق البحثية حول تكاملات الإهليليجية الزائدة والدوال الأبيلية والمعادلات الجبرية أثناء وجوده في الجمنزيم، وأفضل إسهام معروف له هو أسس نظرية الدوال العقدية في متسلسلة قوى، وهذا في حد ذاته عودة إلى لاكرانج مع الفارق أن فيرشتراس تعامل مع المستوي العقدي بدقة تامة وأن قيم متسلسلة قوى داخل دائرتها التقاربية تمثل "عنصر الدالة" والتي يمكن أن توسع عن طريق الاستمرار التحليلي. درس فيرشتراس على وجه التحديد الدوال عامة المعرفة بجداءات لانهائية.

إن دالة فيرشتراس الإهليليجية $\wp(u)$ أصبحت مؤسسة تماماً كما هو الحال مع دوال جاكوبي sn n, cn n, dn n.

كانت سمعة فيرشتراس قائمة على تفكره اليقظ والمفرط، وإن "صرامة فيرشتراس" والتي لم تكن ظاهرة في نظريته للدالة فحسب بل في حساب التغيرات أيضاً. لقد وضح فيرشتراس مفاهيم القيم الصغرى للدالة وللمشتقة، ومع هذا التجاهل فإن الغموض المتبقي للتعبير عن المفاهيم الأساسية لحساب التفاضل والتكامل. كان فيرشتراس ذا وعي رياضياتي لا يضاهى وهو منطقي ومنهجي بمعنى الكلمة، وهناك مثال آخر على وسوسته المفرطة اكتشافه للتقارب المنتظم uniform convergence. بدأ اختزال مفاهيم التحليل إلى مفاهيم حسابية بسيطة مع فيرشتراس والتي نطلق عليها تحسيب الرياضيات arithmetization.

إنها أساساً ميزة النشاط العلمي عند فيرشتراس وهو أنه حتى وقتنا الحاضر يوجد في التحليل إجماع كلي ويقين يتعلق بمسار مثل هذا النمط من التفكير والقائم على مفهوم العدد الأصم والنهاية بوجه عام، فنحن ندين في الواقع له وحده رغم أن هناك إجماعاً حول جميع النتائج للقضايا المعقدة والمرتبطة بنظرية المعادلات التفاضلية والتكاملية على الرغم من جسارة التوليفة المتنوعة بتطبيق أعلى (أعظم) وتجاور ونقل النهايات[1].

15

يعرف هذا التحسيب نمطياً بمدرسة برلين وتحديداً تلك التابعة لليبولد كرونكر Leopold Kronecker وينتمي إلى هذه المدرسة مشاهير من الرياضياتيين أمثال كرونكر، وَكومر Kumer، وَفروبنس Frobnius، الذين لهم باع طويل في الجبر ونظرية الأعداد الجبرية، وإلى هؤلاء بوسعنا أن نضم ديدكند Dedekind، وَكانتور Cantor. استدعي إرنست كومر إلى برلين عام 1855 ليخلف درخليه ودرّس فيها حتى عام 1883 حيث توقف عن العمل الرياضياتي بمحض إرادته لشعوره بتراجع إنتاجيته. طوّر كومر الهندسة التفاضلية للمتطابقات congruences والتي قام بتلخيصها هملتون، وفي طور دراساته أكتشف السطح الرباعي ذا الست عشرة نقطة عقدية والتي سميت باسمه. ذاع صيت كومر على أساس تقديمه للأعداد "المثالية" Ideal numbers في النظرية الجبرية لنطاقات الأعداد النسبية وذلك في عام 1846. لقد ألهمت من جانب هذه النظرية محاولات كومر لغرض إثبات مبرهنة فيرما الرائعة ومن جانب آخر نظرية غاوس للبواقي ثنائية التربيع من حيث مفهوم عوامل الأعداد الأولية التي تم إدخالها ضمن نطاق الأعداد العقدية. تقوم عوامل كومر "المثالية" بتحليل وحيد وفذ للأعداد إلى أعداد أولية في نطاق الأعداد النسبية عموماً، لذا أعطت هذه الاكتشافات تقدماً ملموساً إلى حساب الأعداد الجبرية

1- D.Hilbert, "Uber das Unendliche", Mathematische Annalen,vol. 95(1926),pp.161-90; French translation, Acta Mathematica, vol 48 (1926) pp.91-122.

والتي لخصت فيما بعد بإتقان في تقرير تقدم به ديفيد هلبرت D.Hilbert للجمعية الألمانية الرياضياتية عام 1894[1]. وما نظرية ديدكند وَفيبر التي وطّدت العلاقة بين نظرية الدوال الجبرية ونظرية الأعداد الجبرية في نطاق معين للأعداد النسبية العام إلا مثالاً حياً لتأثير نظرية كومر حول عملية تحسيب الرياضيات.

استقر ليبولد كرونكر في برلين عام 1855 ، هذا الرجل ذو الميول الخاصة درّس في جامعة برلين لعدة سنوات دون أن يتبوأ منصباً رسمياً إلا بعد تقاعد كومر في 1883. تنصب إسهامات كرونكر الرئيسة في الدوال الإهليليجية والنظرية المثالية وفي حساب الأشكال التربيعية ، وإن محاضراته الصادرة في نظرية الأعداد هي في حد ذاتها دراسة متأنية ومتقنة واكتشافات سابقة تعود إليه وحده، وتكشف بجلاء أيضاً اعتقاده بضرورة تحسيب الرياضيات، وهذا الاعتقاد قائم على أبحاثه من أجل الدقة والصرامة في الرياضيات الذي يعزز تصوره على أن الرياضيات يجب أن تقوم على العدد وجميع الأعداد على الأعداد الطبيعية. فالعدد π على سبيل المثال يجب أن يقوم على المتسلسلة $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$ بدلاً من التوصل إليه بالأسلوب الهندسي، وعليه يجب ضم الأعداد الصحيحة وكسور مستمرة معينة تفي بالغرض نفسه. كان مسعى كرونكر هو طوع كل شيء رياضياتي إلى نمط في نظرية الأعداد ، ولقد أفصح عنه في عبارته الشهيرة التي تفوه بها في اجتماع في برلين عام 1886 : " Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk[2] لقد خلق الله الأعداد الصحيحة وأي شيء آخر فهو من صنع الإنسان". لقد قبل كرونكر بتعريف الكينونة الرياضياتية عندما يمكن التحقق منها بخطوات متناهية فقط، وهكذا استطاع التغلب على اللانهائية الفعلية برفض قبولها ، وشعار أفلاطون المعلن هو أن الله "يهندس" دائماً استبدل في مدرسة كرونكر إلى أن الله دائماً "يحسب".

كانت تعاليم كرونكر حول اللانهائية الفعلية مشهّرة ضد نظريات ديدكند وَكانتور تحديداً. كان ريتشارد ديدكند لواحد وثلاثين عاماً أستاذاً

1- D.Hilbert, "Die Theorie der algebraischen Zahlkorper," in Jahresber. Deut. Math. Verein.,4 (1894-95), pp.175-546.

2- The integer numbers were made by God, everything is the work of man.

في المدرسة التقنية في برونسفيك، استطاع صوغ نظرية عن الأعداد الصماء (غير النسبية) irrational. وفي كتابين صغيرين له أنجز للرياضيات الحديثة ما أنجزه إيدوكس لرياضيات الإغريق هما Stetigkeit und irrationale Zallen (1872) و (1888) Was sind und was sollen die Zallen?[1]. هناك تشابه كبير بين "قطع ديدكند" Dedekind cut الذي عن طريقه تعرّف الرياضيات الحديثة العدد الأصم ونظرية إيدوكس القديمة كما تم تقديمها في الكتاب الخامس لإقليدس "المبادئ"، ولقد أعطى كانتور وَفيرشتراس تعريفاً حسابياً للأعداد الصماء مغايراً إلى حد ما عما أدلى به ديدكند ولكنه قائم على الاعتبارات نفسها.

يعتبر جورج كانتور الأستاذ بجامعة هاله من 1869 حتى 1905 أكبر هرطقي من وجهة نظر كرونكر وهو معروف ليس بنظريته حول الأعداد الصماء فحسب بل بنظريته المتعلقة بالمجاميع (Mengenlehre). استطاع كانتور أن يخلق بهذه النظرية مجالاً جديداً متكاملاً للبحوث الرياضياتية قادراً على أن يحقق الكثير من الاحتياجات الماسة للدقة الرياضياتية وذلك متى تم الأخذ بمقدماتها. بدأت إصدارات كانتور في عام 1870 واستمرت لسنوات كثيرة، ففي عام 1883 نشر عمله الموسوم Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre، طوّر كانتور في هذه الأبحاث نظرية للأعداد الموغلة القياسية transfinite cardinal القائمة على معالجة رياضياتية منتظمة للانهائية الفعلية [اللانهائية فعلاً].

لقد حدد كانتور الرمز ℵ لأصغر عدد موغل في المجموعة القابلة للعد، معطياً الاستمرارية لأكبر عدد موغل ومن ثم فإنه من الممكن إيجاد حساب لهذه الأعداد الموغلة وذلك بتعميم الحساب العادي، كما عرّف كانتور أيضاً الأعداد الموغلة الترتيبية معبراً عن الأسلوب الذي ترتب فيه المجموعة.

1- ترجم إلى "Continuity and Irrational Numbers" "The Nature and Meaning of Numbers", W. W. Beman (Chicago,1901) "الاستمرارية والأعداد الصماء" وطبيعة ومعنى الأعداد" وطبعت في كتاب واحد تحت مسمى Essays on the Theory of Numbers, Dover Publication, Inc, 1963 "مقالات في نظرية الأعداد".

تعتبر اكتشافات كانتور هذه بمثابة امتداداً لتكهنات المدرسية القديمة حول طبيعة اللانهائية وَكانتور نفسه على علم بذلك، كما دافع عن قبول سانت أوغستين المطلق باللانهائية الفعلية ولكن وجب عليه الدفاع عن نفسه ضد معارضة الكثير من الرياضياتيين الذين رفضوا قبول اللانهائية باستثناء اللانهائية باعتبارها عملية يمكن التعبير عنها بالرمز ∞. كان كرونكر خصم كانتور اللدود الذي أظهر نزعته السلبية تجاهه بالزخم نفسه نحو تحسيب الرياضيات، ولكن أخيراً نال كانتور تقديراً محترماً وإقبالاً شديداً عندما تعاظمت أهمية نظريته في أسس نظرية الدوال الحقيقية وفي التبولوجيا وغدت أكثر وضوحاً وجلاءً - وبالتحديد عندما أثرى ليبيغ نظرية المجاميع ووضعها مع نظرية القياس. وثمة صعوبات منطقية بدأت تطفو على السطح في نظرية الأعداد الموغلة نتيجة المفارقات التي انبرى بها بورالي فورتي Burali Forti وَرسل وتمخض عن ذلك مدرستان فكريتان حول أسس الرياضيات، وكان بالطبع القرن العشرين هو مسرح الخلاف بين أصحاب المدرسة الشكلية والحدسية أي بتعبير آخر هو امتداد للصراع الذي دارت رحاه بين كانتور وَكرونكر.

16

تزامناً مع هذه التطورات الرائعة في الجبر والتحليل كانت الهندسة من جانب تزدهر بصورة رائعة هي الأخرى ويمكن تتبع أثرها في دروس مونج Monge حيث نجد فيها جذور كلا الأسلوبين "التركيبي (التأليفي)" و "الجبري"، أما بالنسبة لتلامذة مونج فقد نجد الفصل بين الأسلوبين: لقد تطور الأسلوب "التركيبي" في الهندسة الإسقاطية و "الجبري" في هندستنا التحليلية الحديثة. بدأت الهندسة الإسقاطية بوصفها علماً مستقلاً مع كتاب بونسليه Poncelet لعام 1882، حيث كانت هناك ثمة أفضلية للصعوبات كما هو شائع في الحالات المتعلقة بالاكتشافات الأساسية، لذا يحتم على بونسليه أن يواجه منافسه جوزيف غيرغونيه J.Gergonne الأستاذ بجامعة مونبليه Montpellier.

نـشر غيرغونيـه عـدة أوراق بحثيـة مهمـة في الهندسـة الإسـقاطية متزامنـاً مـع بونسليه بعـدما استوعب تمامـاً مسـألة الثنائيـة في الهندسـة، وظهـرت هـذه الأبحـاث في الدورية Annales de mathématiques pures et appliqués وهـي أول دوريـة رياضـياتية بحتة كـان يحررهـا غيرغونيـه نفسه وتوالى ظهورهـا منـذ 1810 حتـى 1831 (واسـتأنف صدورها في عام 1836 تحت مسمى Journal de mathématiques pures et appliquées).

كـان هنـاك مفهوم آخـر على نمـط أسلوب بونسليه في التفكير وهـو المتعلق بالاستمرارية وهو الذي دفعه ليسوق خواص شـكل واحد من تلك الأشـكال الأخرى ولقد عبّر عن هذا المفهوم بالآتي:

لنأخذ شـكلاً اعتباطياً في الوضع العام وفي بعض الحالات غير محدد بين جميـع تلـك الأوضـاع الـتي تأخـذها دون انتهـاك القـوانين والـشروط والصلات الموجودة بين الأجزاء المختلفة للمنظومة.

لنفترض أن علاقة أو خاصية واحدة أو أكثر - إن كانت مترية أو وصفية - وجدت بتوافق مع هذه البيانات... فإنه لـيس جلياً متـى يـتم الاحتفـاظ بهـذه البيانـات، فعندئـذ نخـضع أجـزاءً معينـة للـشكل الأصـلي إلى حركـة مـستمرة. وإن الخـواص والعلاقـات الـتي وجـدت في المنظومـة الأولى ستكون قابلة لتطبيق مراحل متتالية لهذه المنظومة إذا ما أخذ بالحسبان تعديلاً واحداً... فعلى سبيل المثال ثمة كميات قد تلاشت أو غيّرت اتجاها أو إشاراتها...[1].

كـان يجـب أن يؤخـذ هـذا المفهـوم بعنايـة شـديدة مـن حيـث أن صـياغته كانـت بعيـدة كـل البعـد عـن الـشكل الـدقيق، لـذا فـإن الجـبر الحـديث وحـده القادر على تعريف نطاقه بدقة أكبر، وما كـان في متنـاول يـد بونـسليه ومدرسـته أدى إلى نتـائج مـشوقة وجديـدة ودقيقـة ولا سـيما عنـدما طبقـت علـى الانتقـال مـن الحقيقـي إلى التخيلـي، وهكـذا مكنـت بونـسليه مـن أن يـصرح أن هنـاك "نظريـاً نقطـتين تخيليـتين مـشتركتين عنـد اللانهائيـة" لجميـع الـدوائر علـى مـستو. جلبـت هـذه العبـارة معهـا مـا يعـرف بـ "خـط عنـد اللانهائيـة" للمـستوى. لقـد علـق هـاردي

1- Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures (1882), p.xiii.

G.H.Hardy علـى أن مـا يقـصد بـه هنـا هـو الهندسـة الإسـقاطية الـتي أخـذت باللانهائية الفعلية دون أي شكوك[1]. وهكذا أصبح أصحاب التحليل منقسمين حيال هذا الموضوع.

طوّر الهندسيون الألمان أفكار بونسليه، حيث ظهرت أولى إصدارات شتاينر Steiner عام 1826 ونشر عمل موبيوس Möbius الموسوم Barycentrischer calcül عام 1827 وفي عـام 1828 صـدر المجلـد الأول لبلـوكر Plücker المعنـون Analytisch-geometrische Entwickelungen [تطـور الهندسـة التحليليـة] وفي 1831 ظهـر المجلـد الثـاني وتبعـه عمـل شـتاينر Systematische Entwickelung وآخـر الأعمـال الرائـدة للألمان العظام في هذا النمط من الهندسة ظهر في 1847 مع صدور عمل فون شتودت Von Staudt البـدهي (الموضـوعاتي) الإكـسيوماتي Geometrie der lage [هندسـة المواضع].

لقد تم تقديم كلا الاتجاهين التركيبي والجبري في الهندسة من قبل الألمان ذوي الاختصاص في الهندسة، وكان التمثيل النمطي للاتجاه التركيبي (أو البحث) على يد جاكوب شتاينر ابن مزارع سويسري علم نفسه بنفسه وأصبح من عشاق الهندسة عندما تعرّف على أفكار بيستالوتسي Pestalozzi. عقد شتاينر العزم على الدراسة في هيدلبيرغ Heidelberg وانتهى به المطاف إلى التدريس في برلين من 1834 حتى وفاته 1863 متقلداً كرسياً في الجامعة.

كـان شـتاينر هندسـياً بمعنـى الكلمـة ينبـذ اسـتخدام الجـبر والتحليـل إلى درجـة أنـه لا يحبـذ الأشـكال أيـضاً، فالهندسـة مـن وجهـة نظـره يجـب أن تـدرس بتركيز وصفاء ذهني ولا بد من استبدال الحسابات عندما تثير الهندسة التفكير، وهـذا بالتأكيـد صـحيح بالنسبة إلى شـتاينر نفسه الـذي أثـرت أسـاليبه الهندسـية بعـدد كـبير وجميـل وغالبـاً بمبرهنـات رائعـة، فـنحن نـدين إليـه باكتـشاف سـطح شـتاينر بلانهائيـة المخروطيـات المضاعفة عليـه، وهـو الاكتـشاف الـذي جعـل كـل أعمـال شـتاينر كنـزاً نفيـساً للبحـث عـن المسائل الـتي يـراد حلـها عنـد ذوي الميـول الهندسية.

1- G.H.Hardy, A Course of Pure Mathematics, 6th,ed.(Cambridge, 1933) Appendix IV.

شيّد شتاينر هندسته الإسقاطية بأسلوب صارم منتظم منتقلاً من الرسم المنظوري إلى الرسم الإسقاطي ومنه إلى القطع المخروطية، كما قام بحل عدد من المسائل متساوية المحيط بأسلوبه الهندسي النمطي، وخير شاهد برهانه لعام 1836 القائل إن الدائرة هي شكل لمساحة أكبر لكل المنحنيات المغلقة لأي محيط مستخدماً بذلك العملية التي عن طريقها كل شكل لأي محيط ليس بدائرة فإنه يمكن تغييره إلى آخر بالمحيط نفسه وبمساحة أكبر.

كان استنتاج شتاينر أن الدائرة تمثل إذاً الجزء الأقصى المهمل من إسقاط واحد: فهو لم يبرهن الوجود الفعلي للجزء الأقصى، رغم أن درخليه حاول أن يشير البرهان إلى شتاينر إلا أن برهاناً دقيقاً تقدم به فيرشتراس فيما بعد[1].

لا يزال شتاينر بحاجة إلى قياس كي يعرّف نسب التقاطع لأربع نقط أو أربعة خطوط، ولكن فون شتودت الذي كان لسنوات عديدة أستاذاً في جامعة أرلانجن Erlangen قد أزال هذا العيب من النظرية حيث تطرّق في كتابة "هندسة المواضع" إلى تعريف وضع (ألقا) Wurf: أربع نقط على خط مستقيم بطريقة إسقاطية بحتة، ثم وضّح تطابقها مع نسب التقاطع. استخدم فون شتودت هنا ما يعرف بتركيب موبيوس الخالص الذي يؤدي بالتالي إلى اعتبارات بدهية (موضوعاتية) مرتبطة تماماً بأعمال ديدكند عندما تؤخذ في الحسبان القيم الصماء للإحداثيات الإسقاطية، كما برهن فون شتودت على كيفية إدخال العناصر التخيلية بصورة دقيقة في الهندسة باعتبارها عناصر مضاعفة للارتدادات الإهليليجية elliptic involutions.

لقد تطورت الهندسة التركيبية بصورة رائعة أثناء العقود اللاحقة من حيث المضمون في الأسس التي وضعها كل من بونسليه وَشتاينر وَفون شتودت، والتي أدت أخيراً إلى موضوع تحتويه العديد من الكتب الدراسية ذات المستوى المعياري، ويعتبر كتاب ري Reye "Geometrie der lage" (1868) وطبعته الثالثة 1886-1892)[2] أحد الأمثلة المعروفة والمفضلة لدينا.

1- W.Blaschke, Kreis und Kugel (Leipzig,1916) pp.1-42.

2- ترجم الى Lectures on the Geometry of Position (New York,1898) "محاضرات حول هندسة المواضع".

16

كان ممثلو الهندسة الجبرية في ألمانيا هما موبيوس Möbius وبلوكر Plücker وفي فرنسا شاسليه Chasles، وفي إنجلترا كايلي Cayley. كان أوغوست فيرديناند موبيوس لأكثر من خمسين عاماً مراقباً ثم مديراً للمرصد الفلكي في مدينة ليبتزغ Leibzig وعالماً في أمور كثيرة. كان أول من أدخل الإحداثيات المتجانسة في كتابه الموسوم Der Barycentrischer calcül لعام 1827. فعندما توضع الكتل m_1,m_2,m_3 على رؤوس مثلث مثبت فإن مركز الثقالة (الجاذبية) لهذه الكتل هي الإحداثيات $m_1:m_2:m_3$ ووضّح موبيوس كيفية ملاءمة هذه الإحداثيات لوصف الإسقاط والخواص المرتبطة بالمستوى. أصبحت الإحداثيات المتجانسة منذ ذلك الوقت وسيلة مسلماً بها للمعالجة الجبرية للهندسة الإسقاطية. توصل موبيوس إلى اكتشافات مشوقة مثل معاصره فون شتودت الذي يعمل بعزلة تامة. هناك مثال أدخله موبيوس في كتابه الدراسي حول الاستاتيك لعام 1837 هو منظومة العدم null system في نظرية تطابقات الخطوط.

يعتبر "شريط موبيوس" Möbius strip الذي نشر في 1865 أول نموج للسطح غير المعد، وتجدر الإشارة هنا إلى أن موبيوس هو أحد مؤسسي علم التبولوجيا الحديث[1].

درّس يوليوس بلوكر J. Plücker لسنوات طويلة في بون وكان فيزيائياً عملياً لميالاً إلى التجارب وكذلك هندسياً، توصل إلى سلسلة من الاكتشافات في المغناطيسية البلورية والتوصيلات الكهربائية في الغازات وفي المطيافية spectroscopy. وفي سلسلة أوراقه البحثية وكتبه لا سيما Neue Geometrie des Raumes (1868-1869) [الهندسة الجديدة للفضاء (المكان)] أعاد إنشاء الهندسة التحليلية وذلك بتطبيق أفكار جديدة وغنية. برهن بلوكر على قوة الرموز المختصرة، فعلى سبيل المثال $C_1+\lambda C_2=0$

1- اكتشف لستنج J.B.Listing "شريط موبيوس" في غوتنجن ونشره في 1861. كل من موبيوس و لستنج اكتشفاه في 1858.

تمثل حزمة المخروطيات، وأدخل في هذا الكتاب الإحداثيات المتجانسة والمعروفة بإحداثيات "الإسقاط" القائمة على رباعي السطوح الأساسي وعلى المفاهيم الجوهرية وهو أنه ليس بالضرورة أن تؤسس الهندسة على النقط وحدها لكونها عناصر أساسية بل على الخطوط والمستويات والدوائر والكرات جميعها يمكن أن تستخدم باعتبارها عناصر (Raumelemente) تقوم عليها الهندسة.

ألقت هذه المفاهيم الخصبة ضوءاً ساطعاً على كلتا الهندستين التركيبية والجبرية وخلقت صوراً جديدة من الثنائية، فعدد أبعاد شكل هندسي معين يمكن أن يكون عدداً صحيحاً موجباً معتمداً على عدد المعالم الضرورية لتعريف "العنصر". نشر بلوكر نظرية عامة حول المنحنيات الجبرية على مستوٍ من حيث إنه استطاع أن يشتق "علاقات بلوكر" من بين عدد من المتفردات (الشواذ) singularities في عامي 1834-1839.

كان مايكل شاسليه لمدى سنوات ممثلاً ورائداً للهندسة في فرنسا، كان طالباً في المدرسة التقنية في أواخر حياة مونج، وفي عام 1841 أصبح أستاذاً في المؤسسة نفسها وتسلم كرسياً في الهندسة العليا عام 1846 المنصب الذي أنشئ بشكل خاص له في السوربون، حيث درّس هناك لسنوات عديدة. هناك الكثير من الأعمال المشتركة بين شاسليه وَبلوكر وتجدر الإشارة هنا إلى قدرته على الحصول على معلومات هندسية قصوى من معادلاته، مما قاده إلى عمليات حاذقة عن الخطوط المتناظرة والنقط الدائرية في اللانهائية.

سار شاسليه على خطا بونسليه في استخدام الأساليب "العدية" enumerative، والتي تطورت على يده إلى فرع جديد للهندسة، عرف "بالهندسة العدية". هذا المجال الذي سبره بعمق كل من هيرمان شوبيرت H.Schubert في كتابه Kalkül der abzählenden Geometrie لعام 1879، وَتسوتن H.G.Zeuthen في كتابه Abzählaende Methoden لعام 1914. الكتابان يكشفان عن قوة وضعف هذا النمط من الجبر بلغة هندسية وتطلب نجاحه الأولي ردة فعل قادت ستودي E. Study الذي شدّد على أن "الدقة (الصرامة) في الهندسة قد لا تعالج بصورة دائمة باعتبارها عرضية"[1].

1- E.Study, Verhandlungen Dritter Inern.Math.Kongress (Heidelberg, 1905), pp.388-95; B.L.van der Waerden, Diss. (Leiden, 1926).

كـان لـدى شاسليه تقـويم جيـد لتـاريخ الرياضيات ولا سـيما الهندسـة، يعـد كتابه المعروف جيداً Aperçu historique sur l'origine et le développent des méthodes en géométrie (1837) بداية لتاريخ حديث عن الرياضيات، فهو كتاب مقروء باليونانية والهندسة الحديثة ونموذج جيد لتاريخ الرياضيات كتب بيد عالم ذي إنتاجية غزيرة[1].

18

أثناء هـذه السنوات مـن الإنتاجيـة المفعمة بالحيوية علـى الأرجح في الهندسـات الإسقاطية الجديدة والجبرية كانت هناك هندسة من نوع آخر أكثر ثورية قابعة ومختبئـة بـين طيـات الإصـدارات المتنـاثرة والغامـضة أو حتـى المهملـة مـن قبـل أكثـر الرّواد الرياضياتيين. والسؤال الذي حيّر عقول الرياضياتيين لأكثر من ألفي عام هو مـا إذا كانـت مـسلمة إقليـدس للمتوازيـات هـي بدهيـة مـستقلة، أو هـل يمكـن اشـتقاقها مـن بـدهيات أخـرى. في العـصر القـديم حـاول بطليمـوس أن يجـد جوابـاً وكذلك نـصير الـدين في العـصور الوسـطى لمبرت Lambert ولَجنـدر في القـرن الثـامن عشر. جميع هؤلاء الرجال كانت لهم محاولات للبرهنة على هـذه البدهية وجميعهم تعثروا رغم أنهم توصلوا إلى بعض النتائج المشوقة أثناء تحرياتهم[2].

كان غاوس أول رجل يعتقد بالطبيعة المستقلة لمسلمة المتوازيات والتي تقتضي هندسـات أخـرى قائمـة علـى اختيـار بدهيـة أخـرى تكـون ممكنـة منطقيـاً. لم ينـشر

1- شوهت سمعة شاسليه من مزّور وثائق، استطاع في الفترة من 1861 إلى 1870 ان يبيع آلاف المواد المزورة من خطابات كتبها باسكال وافلاطون الى آخرين (وحتى من مريم المجدلية الى لازورس (Lazarus انظر. J.A.Farrer, Literary Forgeries (London, 1907), Ch.XII.

2- إنها حقيقة لافتة للنظر لم يعترف بها آنذاك وهي ان الفيلسوف الاسكتلندي توماس ريد T.Reid في نقده لنظرية بيركلي Berkeley عن التصور (الرؤية) نشر ملخصاً حول الهندسة اللاإقليدية (للنوع الإهليليجي (الناقصي)) تم تمثيلها بأشعة الضوء: An Inquiry into the Human Mind (1764) "تحقيق في العقل البشري" انظر:
N.Daniel, "Thomas Reid's Discovery of Non-Euclidean Geometry" Philosophy of Science, Vol.39 (1972), pp.219-34

غاوس أفكاره حول هذا الموضوع قط، ولكن أول من تحدى على الملأ سلطة ألفي عام معلناً عن هندسة لاإقليدية هما الروسي نيكولاي إيفانوفتش لوباتشفسكي N.I.Lobačevskī والهنغاري يانوس بولاي J.Bolyai ليلفظ بالهنغارية بويائي].

كان لوباتشفسكي أستاذاً بجامعة كازان Kazan وسبق أن حاضر في بدهية إقليدس للمتوازيات في 1836 وهو أول من نشر أفكاراً حول هذا الموضوع، حيث صدر كتابه الأول بالروسية في 1829-1830 ولسوء الحظ قلة من القراء لاحظوا ذلك وحتى الطبعة اللاحقة بالألمانية المعنونة Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien[1] "أبحاث هندسية حول نظرية المتوازيات" لم يثر الانتباه كثيراً على الرغم من الإعجاب الذي أبداه غاوس نفسه. وفي الوقت نفسه نشر بولاي أفكاره حول هذا الموضوع.

يانوس أو يوهان بولاي هو ابن لمدرس رياضيات من ضواحي أحد المدن الهنغارية يدعى فاركاس أو فولفغنغ بولاي تلقى تعليمه في غوتنجن عندما كان غاوس طالباً فيها وظلت علاقتهما متواصلة عبر مراسلاتهما من حين إلى آخر. قضى فاركاس جل وقته في محاولة لإثبات مسلمة إقليدس الخامسة (انظر الفصل الثالث القسم السابع) ولكنه لم يتوصل إلى نتائج محددة، وهكذا ورث بولاي الصغير هذا الولع والهيام وحاول هو الآخر البرهنة على ذلك رغم إلحاح الأب بالعدول عن هذه المسألة والاشتغال بشيء آخر. وإليكم ما كتبه الأب إلى ابنه:

> يجب عليك أن تمقتها بالانفعال نفسه الذي يثيره الجماع، وسوف تحرمك من جميع ملذاتك وسيكون ذلك على حساب صحتك وراحتك وكل بهجة في حياتك، فهذا الظلام الدامس قد يلتهم آلاف الشوامخ أمثال نيوتن ولكن لن يكون هناك نور على البسيطة إذاً... (خطاب 1820).

التحق يانوس بالعسكرية وكون له سمعة كضابط هجوم، وتدريجياً بدأ يتقبل مسلمة إقليدس باعتبارها بدهية مستقلة واكتشف أنه من الممكن صوغ هندسة قائمة على بدهيات أخرى، فمن نقطة واحدة على مستوٍ يمكن وضع عدد لانهائي من

1- ترجم إلى Geometrical Researches on the Theory of Parallels by G.B.Halsted, واعيدت طباعته في R.Bonola, Non-Euclidean Geometry (1912), Dover Pub, 1955

الخطوط بحيث لا تتقاطع مع أي خط آخر على المستوى. وهي الفكرة نفسها التي خطرت على بال غاوس وَلوباتشفسكي، كتب بولاي انطباعاته هذه في ملحق لكتاب والده تحت عنوان Appendix Scientiam Spatii absolute veram exhibens[1] ونشر في 1832 "علم الفضاء (المكان) المطلق".

كتب الأب معبراً عن مخاوفه وقلقه إلى غاوس يطلب منه النصيحة حول مصير ابنه بالنسبة إلى وجهة نظر التقليديين، ولكن جاء الرد من غوتنجن مفعماً بالحماس والتصديق على عمل بولاي الشاب، بالإضافة إلى ملاحظة غاوس بعدم كيل المديح إلى بولاي حتى لا يفسر بأنه مدح شخصي أي لغاوس نفسه، لأن ما كتب في الملحق هو في الواقع من وحي أفكاره لسنوات طوال ولكنه لم يفصح عنه.

انتاب يانوس الشاب إحباطاً شديداً نتيجة هذا الرد الذي كان يأمل أن يضعه مقام عالم جليل ولكنه شعر بأن الأولوية قد اختطفت منه، وتعاظم الإحباط عندما تلقى اعترافاً بسيطاً من هناك، وعلى الرغم من ذلك فقد واصل أبحاثه في الرياضيات، فمثلاً مناقشة التمثيل الهندسي للكميات التخيلية. ازداد تعكر ذهنه بشدة عندما وقع في يده كتاب لوباتشفسكي الطبعة الألمانية (1860).

تتشابه نظريتا بولاي وَلوباتشفسكي من حيث المبدأ ولكنهما مختلفتان تماماً، والغريب في الأمر كيف تخرج أفكار جديدة بصورة مستقلة تماماً من غوتنجن وَبودابست وَكازان في العصر نفسه بعد فترة حضانة استغرقت ألفي عام، واللافت أيضاً كيف نضجت جزئياً خارج المحيط الجغرافي لعالم البحث الرياضياتي. غالباً ما تولد الأفكار العظيمة والجديدة خارج المدارس وليس داخلها. هناك صلة لا محالة: وهو أن غاوس عندما كان طالباً في غوتنجن كان صديقاً للأب بولاي وأن مدرس لوباتشفسكي في كازان السيد بارتلز J.M.Bartels كان أحد أساتذة غاوس.

ظلت الهندسة اللاإقليدية (التسمية تعود إلى غاوس) لعقود طويلة مجالاً غامضاً في الرياضيات يتجاهله معظم الرياضياتيين ويصرفون النظر عنه لكونه

1- ترجم إلى The Science of Absolute Space by G. B. Halsted واعيدت طباعته في .Bonola, تحت عنوان Non-Euclidean Geometry

مرفوضاً من قبل الفلسفة الكانتية [أو الكانطية نسبة إلى الفيلسوف الألماني إمانويل كانت Kant] التي ترفض أن تأخذ اللاإقليدية بجدية. يعد ريمان Riemann أول عالم بارز يدرك أهمية اللاإقليدية ولقد فتحت نظريته العامة حول المنطويات (المتنوعات) manifold الباب على مصراعيه ليس على أنواع الهندسات اللاإقليدية الموجودة فحسب، بل على هندسات أخرى تعرف بالهندسات الريمانية لنسبة إلى ريمان نفسه] وهكذا جاء القبول الكلي لهذه النظريات بعد جيل واحد فقط من ريمان بعدما استوعبت نظرياته (أي في 1870 وما بعد).

ظل هناك تعميم آخر للهندسة الكلاسيكية قائماً في السنوات التي سبقت ريمان ولكنه لم يلق أي إطراء إلا بعد وفاته، وكان هذا النوع من التعميم يتعلق بالهندسة ذات الأكثر من ثلاثة أبعاد. جاء تطويرها كاملاً إلى العالم في عمل غراسمان Grassmann الموسوم Ausdehnungslehre (نظرية التوسّع) لعام 1844. كان هيرمان غراسمان مدرساً في الجمنزيم التابع لمدينة شتيتن Stettin ورجلاً غريباً ومتعدد المواهب، كتب في شتى الموضوعات كالتيارات الكهربائية واللون والصوت واللغات وعلم النبات والفولكلور، ولا يزال قاموسه السنسكريتي للراغفيدا قيد الاستعمال. صدر كتاب غراسمان "نظرية التوسيع" بطبعته المنقحة والمقروءة عام 1861 بنمط إقليدي على وجه الخصوص. قام هذا الكتاب على هندسة لفضاء من الإحداثيات n، أولاً من منطلق تآلفي [هندسة تآلفية هي دراسة الفضاءات التآلفية وهي أكثر عمومية من الهندسة الإقليدية ولكنها أقل عمومية من الهندسة الإسقاطية، ويمكن الحصول عليها باختيار مستقيم عند اللانهائية في هندسة إسقاطية بحيث لا تقارن المسافات إلا على مستقيمات متوازية وبذلك لا يوجد مفهوم للتعامد] ثم فضاءات قياسية. استخدم غراسمان رمزية ثابتة من حيث تمكننا من التعرف الآن على المتجه ورموز الموتر (التنسور) tensor (وجداء فراغاته هو الموتر) مما جعل عمله غير متاح لمعاصريه، وهكذا أخذ الجيل اللاحق أموراً في هيكلة غراسمان لتشيد تحليل متجهات قائم على الفضاءات التآلفية والقياسية.

لقد أدخل كايلي المفهوم نفسه في 1843 لفضاء ذي أبعاد n بصورة أقل نفوراً، فالهندسة ذات الإحداثيات التي تتجاوز الثلاثة أبعاد استقبلت بنوع من الشك والريبة،

وهنا نجد ريمان مرة أخرى في عام 1854 يوجّه تقويماً كاملاً وبسيطاً، وإضافة إلى أفكار ريمان نجد بلوكر الذي يشير إلى أن عناصر الفضاء ليست بالضرورة أن تكون نقطاً، لذا فإن هندسة الخطوط في الفضاء الثلاثي يمكن اعتبارها هندسة ذات أبعاد أربعة أو كما يؤكد كلاين Klein أنها هندسة ثنائية ذات الأبعاد الأربعة في فضاء خماسي الأبعاد.

ومع نهاية القرن التاسع عشر طرأ قبول تام للهندسات التي تتجاوز الثلاثة أبعاد، ويعزى ذلك بالدرجة الأساسية إلى استخدامها في تفسير النظرية الجبرية والصور التفاضلية لأكثر من ثلاثة متغيرات.

19

تفيدنا أسماء مثل هملتون وَكايلي إلى أن الرياضياتيين الناطقين باللغة الإنجليزية بدؤوا أخيراً مع 1840 بمواكبة زملائهم في القارة الأوروبية، إلا أن أساتذة كمبردج وَأكسفورد حتى في القرن التاسع عشر يعتبرون أي محاولة لتطوير نظرية المشتقات الزمنية (معدل التغيرات) fluxions تمرداً غير مرغوب فيه ضد ذكرى نيوتن المقدسة، والحاصل أن المدرسة النيوتنية في إنجلترا والليبنتزية في القارة قد أزاحت إلى حد ما حساب آويلر التكاملي لعام 1768 لكونه يمثل اتحاداً للمدرستين وتعبيراً عديم الجدوى، وهكذا انشطرت المعضلة في 1812 إلى مجموعة من الرياضياتيين الشبان في كمبردج الذين كانوا تحت تأثير وإلهام روبرت وود هوس R.Woodhouse العجوز، مما تمخض عنه تشكيل رابطة تحليلية هدفها نشر الرموز التفاضلية. كان جورج بيكوك G.Peacock وَتشارلز بابج C. Babbage وَجون هيرشل J.Herschel روّاد هذه الجمعية وكان دفاعهم على حد تعبير بابج "مفاهيم أيزمية - d بحتة مقابل عمر ولادة الجامعة"[1].

1- "Principles of pure d-ism as opposed to the dot-age of the university".
J.B.Dubbey," The Introduction of the Differential Notation in Great Britain" Annals of Science ,Vol. 19 (1963), pp.37-48.

لاقت هذه الحركة في البداية نقداً لاذعاً تم التغلب عليها باتخاذ إجراءات مثل إصدار الترجمة الإنجليزية لكتاب لاكرو Locroix عام 1816 الموسوم Traité éleméntaire de calcul différential et de calcul integral (الطبعة الثانية 1806) [أطروحة في مبادئ حساب التفاضل وحساب التكامل] وهكذا بدأ الجيل الجديد في إنجلترا المشاركة في الرياضيات الحديثة.

جاء أول إسهام مهم من مجموعة كمبردج أو بالأحرى من بعض الرياضياتيين الذين أخذوا على عاتقهم دراسة الرياضيات القارية بصورة مستقلة. وأهم هؤلاء الرياضياتيين هما هملتون Hamilton وَجورج غرين G.Green. ومن المشوق أيضاً أن نلحظ مع هذين الرجلين كما هو مع ناثانيل بودج Nathaniel Bowditch في إنجلترا الجديدة الطموح نفسه لدراسة أيزمية - d البحث القادم ألينا من "ميكانيك السماء" لـ لابلاس. جورج غرين هو ابن طحان من نوتنجهام Nottingham تلقى تعليماً ذاتياً حيث تتبع الاكتشافات الجديدة في الكهرباء بعناية فائقة وبعدما أتضح له عدم وجود نظرية رياضياتية تعبر عن ظاهرة كهربائية أي في 1825 تقريباً، لم يقدم بواسون في 1812 سوى االبدايات. وإليكم ما عبّر عنه غرين عندما قرأ لابلاس:

> كم ستكون مطلوبة إذا ما أخذنا بالحسبان قدرة القوة الكلية، وإذا أخذنا الكهرباء مثلاً والتي يجب أن تخضع للحسابات ومن ثم تعكس المزايا التي قد تبرز من حلول القضايا الصعبة، وإذا ما صرفت برمتها وتم تفحص كل قوة من القوى بصورة محددة والتي تقوم بدفع الأجسام المختلفة في أي منظومة ومن ثم التركيز على دالة محددة يعتمد على تفاضلها، ولقد استقريت في محاولاتي ما إذا كان من الممكن اكتشاف إي علاقات عامة قائمة بين هذه الدالة والكميات الكهربائية التي تنتجها الأجسام.

كانت النتيجة عمل غرين الموسوم "Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism" "مقالة حول تطبيق التحليل الرياضياتي في نظريات الكهربائية والمغناطيسية" الصادر في 1828، والذي يعد أول محاولة رياضياتية في النظرية الكهرومغناطيسية بل بداية للفيزياء

الرياضياتية الحديثة في إنجلترا أيضاً. وبالاستعانة بورقة غاوس البحثية لعام 1839 استطاع غرين أن يؤسس نظرية للجهد تكون بمثابة فرع مستقل في الرياضيات. لم يكن غاوس على علم بورقة غرين التي أصبحت معروفة على نطاق واسع عندما أعاد طباعتها وليم تومسون W.Thomson (وفيما بعد اللورد كلفن Kelvin) في دورية كريل Crelle عام 1846.

تبدو القرابة بين غاوس وَغرين جداً حميمة وذلك من حيث اختيار غرين لفظ "دالة الجهد" بينما اختار غاوس لفظ "الجهد" لغرض حل معادلة لابلاس. هناك متطابقتان مرتبطتان جداً تربطان تكاملات السطح والخط ويطلق عليهما "صيغة غرين" و "صيغة غاوس" وإن كلمة "دالة غرين" في حل معادلات التفاضل الجزئي تضفي شرفاً لابن الطحان الذي درس لابلاس في أوقات فراغه.

ليس لدينا مجال أن نتتبع تطورات الفيزياء الرياضياتية في إنجلترا أكثر مما فعلنا، والقضية ذاتها في ألمانيا، ولكن مع هذه التطورات سطعت أسماء لامعة مثل ستوكس Stokes وَريليه Rayleigh وَكلفن Kelvin وَمكسويل Maxwell وَكرتشوف Kirchhoff وَهلموتز Helmholz وَغبس Gibbs وغيرهم كثر، حيث ساهم هؤلاء الرجال في حل معادلات التفاضل الجزئي إلى درجة أن الفيزياء الرياضياتية ونظرية معادلات التفاضل الجزئي الخطي للرتبة الثانية تبدو أحياناً متطابقة. وهكذا جاءت الفيزياء الرياضياتية بأفكار خصبة إلى مجالات الرياضيات وإلى الاحتمالات ونظرية الدالة العقدية وكذلك إلى الهندسة. تتمتع أعمال جيمس كلارك مكسويل بأهمية قصوى، فعمله المكون من جزأين والصادر في 1873 تحت عنوان Treatise on Electricity and Magnetism[1] "أطروحة في الكهرباء والمغناطيسية" الذي أعطى فيهما شرحاً رياضياتياً منتظماً حول نظرية الكهرومغناطيسية القائمة على تجارب فرادي Faraday والتي هيمنت على الكهرباء الرياضياتية، وفيما بعد ألهمت نظرية لورنتز Lorentz حول الإلكترون وآينشتاين حول النسبية.

1ـ قامت مطبعة Dover بإعادة طباعته في 1954.

20

كانت الرياضيات البحتة في بريطانيا القرن التاسع عشر مجرد جبر مع تطبيقات أساسية للهندسة، وكانت محصورة بين ثلاثة رجال - كايلي Cayley وَسيلفستر Sylvester وَسالمون Salmon - وهم روّاد هذا المجال دون منازع.

كرّس أورثر كايلي سنواته المبكرة في دراسة القانون ولكن في 1863 تبوأ كرسي أستاذه سدلرين Sadlerian الجديد للرياضيات في كمبردج حيث شغله بالتدريس لثلاثين عاماً. كان كايلي في الأربعينيات من عمره عندما بدأ يمارس المحاماة في لندن والتقى آنذاك بسيلفستر الخبير في شؤون التأمين، ومن هنا بدأ اهتمامهما المشترك في جبر الأشكال - أو كما أطلق عليه كايلي حدوديات متجانسة Quantics[1] الذي أدى إلى بداية لنظرية اللامتغيرات الجبرية.

كانت نظرية اللامتغيرات لسنوات طوال "عالقة في الهواء" ولا سيما عندما بدأت المحددات determinants تأخذ مسارها كموضوع للدراسة. لقد تجاوزت أعمال كايلي وَسيلفستر الباكرة موضوع المحددات، وكانت محاولتهما مقصودة لإعطاء نظرية إلى اللامتغيرات للصور الجبرية تكون منتظمة ومتكاملة برموزها الخاصة وقواعد بنيتها. كانت هذه النظرية هي التي طوّرها فيما بعد آرونولد Aronhold وَسليبش Clebsch في ألمانيا حيث كوّنا نسخة جبرية طبق الأصل لهندسة بونسليه الإسقاطية.

تغطي أعمال كايلي الضخمة موضوعات متنوعة وشاسعة في مجالات شتى مثل الزمر المتناهية والمنحنيات الجبرية والمحددات واللامتغيرات والصور الجبرية ومن بين أفضل أعماله المعروفة هي تقاريره العلمية التسعة حول الحدودية المتجانسة والتي نشرت تحت عنوان Memoirs on Quantics في الفترة 1854-1878. احتوت الورقة

1- عبارة عن دالة متجانسة في متغيرين او اكثر في شكل ذي معاملات صحيحة او منطقية لا سيما الشكل التربيعي، فمثلاً $x^2 + 3xyz + y^2$ حدودية تربيعية ثلاثية - معجم الرياضيات، اكاديميا - المترجم

السادسة من هذه المجموعة على التعريف الإسقاطي للقياسية (المترية) بالنسبة لقطع المخروطيات المنشورة عام 1859، الأمر الذي قاد هذا الاكتشاف كايلي إلى التعريف الإسقاطي للقياسية الإقليدية حيث عاونه هذا الأسلوب على تحديد مكانة الهندسة القياسية (المترية) ضمن إطار الهندسة الإسقاطية. لقد غابت علاقة هذا القياس الإسقاطي بالهندسة اللاإقليدية عن عين كايلي، وفيما بعد تم اكتشافها من قبل فليكس كلاين.

لم يكن جيمس جوزيف سيلفستر رياضياتياً فحسب، بل شاعراً أيضاً ذا فطنة وحصافة، وهو أعظم مبدع للمصطلحات الحديثة في تاريخ الرياضيات برمته بالإضافة إلى ليبنتز. درّس في الأكاديمية العسكرية في وول وج Woolwich من 1855 إلى 1869 وغادر إلى أمريكا مرتين كأستاذ زائر في جامعة فرجينيا Virginia (1841-1842) والثانية بجامعة جونس هوبكنز Johns Hopkins في بلتمور Baltimore (1877-1883) وكان الهدف من الزيارة الثانية هو تأسيس برنامج للدراسات العليا في الرياضيات للجامعات الأمريكية وعبر أسلوب تدريسه أخذت الرياضيات تزدهر في الولايات المتحدة.

غدت ورقتان من أوراق سيلفستر البحثية في الجبر من الكلاسيكيات: نظريته حول القواسم الأولية لعام 1852 (أعاد اكتشافها فيرشتراس في 1868) وقانونه عن القصور الذاتي للصور التربيعية لعام 1852 (كان معروفاً لدى جاكوبي وَريمان ولكنه لم ينشر) ونحن في الواقع ندين له بالكثير من الألفاظ مثل، اللامتغير invariant والمتغير المصاحب covariant والتدرّج المصاحب cogradient ونقطة اقتران القمر syzygy. هناك الكثير من النوادر التي قيلت عنه منها ضروب متعددة لأستاذ شارد الذهن.

وثالث جبري - هندسي إنجليزي هو جورج سالمون الذي ظل طوال حياته مرتبطاً بكلية ترنيتي Trinity [الثالوث] بدبلن حيث تخرج على يد هملتون ودرس الرياضيات واللاهوت ويتميز بكتبه الدراسية المعروفة جيداً والتي تنبض بها الدعابة والوضوح. لقد فتحت هذه الكتب آفاقاً جديدة على الهندسة التحليلية ونظرية اللامتغيرات لأجيال عدة من طلاب العلم في بلدان كثيرة مما يصعب حتى الآن

تجاوزها. هذه الكتب هي Conic Sections (1848) "قطع المخروطيات" و Higher Plane Curves (1852) "منحنيات المستوى الأعلى" و Modern Higher Algebra (1859) "الجبر العالي الحديث" و Analytic Geometry of Three Dimensions (1862) "الهندسة التحليلية لثلاثية الأبعاد"، ولا تزال دراسة هذه الكتب مقبولة ومعهوداً بها لجميع لطلاب الهندسة.

21

هناك إنتاجان يتعلقان بالجبر في المملكة المتحدة يسترعيان انتباهنا هما: الأعداد الرباعية العقدية quaternion لهملتون، والأعداد الرباعية العقدية الثنائية biquaternion لـ كلفورد Clifford. هملتون هو فلكي البلاط الملكي الإيرلندي الذي أنهى أعماله في الميكانيك والضوء ثم تحوّل إلى الجبر في 1835، وما عمله الموسوم Theory of Algebraic Couples لعام 1835 إلا تعريف بالجبر باعتباره علماً حول الزمن البحت ومنها صاغ جبراً دقيقاً حول الأعداد العقدية باعتبار أن العدد العقدي هو زوج من الأعداد. من المحتمل أن يكون المنحى مستقلاً عن أعمال غاوس الذي أنشأ هو الآخر جبراً دقيقاً للأعداد العقدية في نظريته للبواقي التربيعية الثنائية لعام 1831. كلا المفهومين مقبولان حالياً، وكما حاول هملتون الغوص في جبر الأعداد الثلاثية والرباعية وغيرها، سلطت الأضواء عليه - كما يحلو لمعجبيه أن يقولوا - وفي ذات يوم من أيام أكتوبر عام 1843 عندما كان هملتون يتجول بالقرب من جسر دبلن اكتشف الأعداد الرباعية العقدية Quaternion، ونشرت دراساته حول هذا الموضوع في جزأين كبيرين هما Lectures on Quaternions (1853) و Elements of Quaternions (1866) الذي صدر بعيد وفاته. وأفضل جزء معروف لحساب الأعداد الرباعية العقدية هو المتعلق بنظرية المتجهات Vectors (والتسمية من نحت هملتون) والذي كان أيضاً جزءاً من نظرية غراسمان للتوسع. وبسبب هذه الحقيقة فإن الأعمال الجبرية لهملتون وَغراسمان غالباً ما تتداول وتقتبس على نحو متكرر، ففي أيام هملتون وفيما بعد لفترة طويلة كانت الأعداد الرباعية العقدية

محل تقدير ومفاخرة، وهناك من الرياضياتيين البريطانيين من رأى فيها نوعاً من الحساب العام الليبنتزي [نسبة إلى ليبنتز] والذي وجدت ردة فعله (هيفسايد Heaviside مقابل تيت Tait) مما أفقد هذه الأعداد بريقها.

إن نظرية الأعداد فوق العقدية التي شرحها بيرس Peirce وَشتودي Study وَفروبنس Frobenius وَكارتان Cartan قد وضعت الأعداد الرباعية العقدية في مكانها الرسمي باعتبارها أبسط نظام عددي تجميعي لأكثر من حدين، حتى المعجبون بها إبان ذروتها أدت إلى اجتماع دولي الهدف منه تطوير دراسة هذه الأعداد ومنظومة الرياضيات المترابطة التي اختفت وذهبت ضحية الحرب العالمية الأولى.

هناك منظور آخر حول خلاف الأعداد الرباعية العقدية بين أنصار هملتون من جهة وأنصار غراسمان من جهة أخرى، حيث برز تحليل المتجهات باعتباره فرعاً مستقلاً في الرياضيات نتيجة جهود غبس Gibbs في أمريكا وَهفسايد في إنجلترا. احتدم هذا الخلاف بين عام 1890 وفترة الحرب العالمية الأولى، وحسم أخيراً بتوظيف نظرية الزمر groups التي وطدّت أفضلية كل طريقة بمجال عملياتها[1].

وليم كنجدون كلفورد W.Kingdon Clifford الذي توفي في عام 1879 عن عمر ناهز الثلاثة والثلاثين، درّس في كلية الثالوث بكمبردج وفي الكلية الجامعية بلندن، وهو أول إنجليزي يستوعب أعمال ريمان وتقاسما معاً حول أصل مفهومنا للفضاء (المكان). طوّر كلفورد هندسة الحركة من أجل تعميم أعداد هملتون الرباعية العقدية وتوصل إلى ما يعرف بالأعداد الرباعية العقدية الثنائية biquaternions في الفترة 1873-1876. هذه الأعداد هي أعداد رباعية عقدية وعوامل أخذت من منظومة الأعداد العقدية $a+b\varepsilon$ حيث ε يأخذ القيم 1+ أو 1- أو 0 ولذا يمكن استخدامها لدراسة الحركة في الفضاءات اللاإقليدية. لا يزال يقرأ كتاب كلفورد Common Sense of the Exact Science [الحس المشترك (العام) للعلوم الدقيقة] لكونه يعبّر عن قرابة تفكيره مع فليكس كلاين F. Klein، وتكشف هذه القرابة أيضاً بدلالة الكلمة "فضاءات كلفورد - كلاين Spaces of Clifford-Kline" لمتنوعات

1- F. Klein, Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19 Jahrhundert (Berlin, 1927), Vol. II, pp. 27-52; J.A. Schouten, Grundlagen der Vektor und Affinoranalysis (Leipzig, 1914) وأوراق بحثية كثيرة لكارتان E.Cartan

إقليدية مقفلة معينة في الهندسة اللاإقليدية. ولو كتب عمر أطول لكلفورد فإن أفكار ريمان سيكون تأثيرها في الرياضياتيين البريطانيين قبل جيل على ما هو فعلاً.

كانت الرياضيات البحتة لعقود عدة محتفظة بتأكيدها القوي الجبر الصوري في البلدان الناطقة بالإنجليزية، مما أسفر هذا التأثير في أعمال بنيامين بيرس في جامعة هارفارد وتلميذ ناثينال بوديج Nathaniel Bowditch الذي قام بعمل متميز في الميكانيك السماوي وفي عام 1870 نشر عمله الموسوم Linear Associative Algebras، أولى الدراسات المنتظمة حول الأعداد فوق العقدية[1]. ظهرت النزعة الصورية في الرياضيات الإنجليزية على حساب عمل جورج بول G. Boole الموسوم An Investigation of the Laws of Thought [تحقيقات في قوانين الفكر] الصادر في 1854[2] من كلية الملكة بدبلن. وهنا نجد توضيحاً للقوانين المنطقية الصورية التي قام بتصنيفها أرسطو ودرّست في الجامعات لقرون وغدت موضوعاً لحساب التفاضل والتكامل، ثم ترسخت هذه المفاهيم في تناغم مع أفكار ليبنتز حول الخصائص العامة.

كان بول متأثراً بأعمال أوغوستس ديمورغان Augustus De Morgan المتعلقة بالمنطق الرمزي، الأستاذ بالكلية الجامعية في لندن من 1826 إلى 1866 وهو الذي قدّم أول شكل لمنطق المقدمات propositions. كان تأثير ديمورغان كبيراً في الرياضيات البريطانية عن طريق مهنته الطويلة وحصافته: راجع عمله الذي صدر بعيد وفاته عام 1872 الموسوم Budget of Paradoxes.

فتح "جبر المنطق" مدرسة فكرية كتب لها أن تؤسس وحدة بين المنطق والرياضيات، وجد صداها في كتاب فريجه G. Frege الموسوم Die Grundlagen der Arithmetik [أسس الحساب] الصادر في 1884، الذي قدم فيه اشتقاقات منطقية

1- أحد ابناء بنيامين بيرس، شارلز ساندرز بيرس لم يكن رياضياتياً تطبيقياً فحسب مثل والده (لسواحل الولايات المتحدة الأمريكية والمسح الجيودسي) بل له إسهامات جليلة في فلسفة الرياضيات والتي لم يكن لها صدى إلا حديثاً. انظر ايضاً
C.Eiserle, Studies in Scientific and Mathematical Philosophy of C.S.Peirce (The Hague, 1979)

2- إعادة طباعته Dover, Inc, 1951

للمفاهيم الحسابية؛ وصلت هذه الدراسات ذروتها في ملحمة برتراند رسل وَوالفرد وايتهد الموسومة (1910-1913) Principia Mathematica من القرن العشرين. كان لهذه الأعمال بالتالي أثر في أعمال هلبرت المتعلقة بأسس الحساب ومن ثم التخلص من مفارقات اللانهائية[1].

22

رحبت أبحاث كايلي وَسيلفستر المتعلقة حول نظرية اللامتغيرات invariants بحرارة شديدة في ألمانيا، حيث قام عدد من الرياضياتيين بتطوير النظرية إلى علم قائم على أساس خوارزمية كاملة، وأبرز هؤلاء هم هسه Hesse وَأرنولد Arnold وَسليبش Clebsch وَغوردان Gordan. كان هسه أستاذاً في جامعة كونسبيرغ Köingsberg وفيما بعد في هايدلبرغ Heidelberg وَميونخ Munich، حيث وضّح قدرة الأساليب المختصرة في الهندسة التحليلية كما هو الحال مع بلوكر؛ وكان شغله الشاغل التفكر بالاستعانة بالإحداثيات المتجانسة والمحددات. أما أرنولد الذي درّس في المدرسة التقنية ببرلين فقد كتب ورقة بحثية عام 1858 طوّر فيها رمزية متساوقة لنظرية اللامتغيرات بالاستعانة بما يسمى العوامل المثالية (ليس لها صلة بأعداد كومر المثالية). طوّر سليبش هذه الرمزية في عام 1861 مما جعل رمزية "سليبش - أرنولد" أكثر شمولية وأسلوباً مقبولاً به لدراسة اللامتغيرات الجبرية المنتظمة. وها نحن الآن نقر بهذه الرمزية في متجهات هملتون وجداءات فراغ غراسمان وثناويات[2] غبس والأبعاد الخاصة للموترات ومن ثم الجبر الخطي. لقد أثرى غوردان الأستاذ بجامعة إرلنجن Erlangen نظرية اللامتغيرات وبرهن في الفترة 1865-1869 أن أي شكل ثنائي ينتمي إلى نسق متناهٍ من اللامتغيرات النسبية والمتغيرات المصاحبة فإنه

1- D.Hilbert and W.Ackermann, Grundzuge der theoretischen Logik (Berlin, 1928) انظر M.Black, The Nature of Mathematics (New York and London, 1934). أيضاً

2- Dyadic: ثناوي، أساسه اثنان، ثنائي الطية، مثلاً الأعداد المنطقة الثناوية هي تلك التي تكون لأشكالها المختزلة مقامات من قوى 2.

يمكن أن يعبّر عن اللامتغيرات النسبية والمتغيرات المصاحبة الأخرى بصورة منطقية. هذا ما تنص عليه مبرهنة غوردان (Endlichkeitssatz) والتي طوّرها هلبرت إلى أشكال جبرية لعدد من المتغيرات n في 1890.

كان ألفرد سليبش أستاذاً في جامعة كارلزرو Karlsruhe وَغيسن Giessen وَغوتنجن توفي عن تسعة وثلاثين عاماً، وكانت حياته مفعمة بالإنجازات الرائعة حيث صدر له كتاب في 1862 في المرونة. سار على نهج لاميه وَسانت فينه وطبّق نظريته حول اللامتغيرات في الهندسة الإسقاطية، وكان واحداً من الأوائل الذين استوعبوا نظريات ريمان للدوال والسطوح المتعددة المتصلة بالمنحنيات الجبرية. يقدم عمل سليبش - غوردان المعنون Theorie der Abelschen Funktionen لعام 1866 عرضاً واسعاً لهذه الأفكار، كما أسس سليبش الدورية الرياضياتية Mathematische Annalen التي كانت لأكثر من ستين عاماً من أبرز الدوريات الرياضياتية، كما نشر تلميذه F.Lindemann محاضراته في الهندسة للفترة (1876-1877) الذي كتاباً دراسياً ذا مستوى في الهندسة الإسقاطية.

23

ازداد نمو الرياضيات بصورة هائلة ومع ذلك بقيت بنيتها غير متماسكة حتى عام 1870 وانقسمت إلى مجالات كثيرة وهكذا باتت على المتخصصين فقط، حتى كبار الرياضياتيين - هرمت Hermite وَفيرشتراس وَكايلي وَبلترامي Beltrami - كان إتقانهم محصوراً في مجالات محدودة، ثم تطور التخصص بصورة منتظمة حتى وقتنا الحاضر إلى مؤشرات خطيرة، ولم تتوقف ردة الفعل ضد هذا التنامي ولم تكن الإنجازات الأكثر أهمية سوى نتيجة توليفة لمجالات الرياضيات المختلفة للمئة سنة الأخيرة.

تم التحقق من هذه التوليفة في القرن الثامن عشر في أعمال لاكرانج وَلابلاس في الميكانيك التي بقيت الأساس لكل عمل رصين ذي صفة متنوعة. أضاف القرن التاسع عشر إلى هذه المبادئ الموحدة الجديدة وعلى وجه الحصر

نظرية الزمر ومفهوم ريمان للدالة والفضاء، وبالطبع لا يمكن فهم أهدافها ومعانيها إلا عن طريق أعمال كلاين ولي وبوانكاريه.

كان فليكس كلاين مساعداً للأستاذ بلوكر في جامعة بون في أواخر الستينيات وعلى يده تعلم الهندسة، وعندما كان في ربيعه الثاني والعشرين أي عام 1870 جال باريس وهناك التقى بالنرويجي سوفس لي Sophus Lie الذي يكبره بستة أعوام وكانت له اهتمامات في الرياضيات من فترة وجيزة. التقى الشابان بالرياضياتين الفرنسيين ومن بينهم كميل جوردان Camille Jordan في 1870 والذي صدر له تواً عمل بعنوان Traité des substitutions وهو كتاب حول تعويضات الزمر ونظرية غالوا للمعادلات.

بدأ كلاين و لي يفهمان الأهمية المركزية لنظرية الزمر ومن هنا قسما مجال الرياضيات إلى قسمين تبعاً للعهد الذي أبرماه بينهما، ركز كلاين جل اهتمامه على لااستمرارية الزمر بينما ركز لي على الاستمرارية. عين كلاين أستاذاً في جامعة إرلنجن عام 1872 وفي كلمته الافتتاحية شرح أهمية مفهوم الزمر لتصنيف مجالات الرياضيات المختلفة وعرفت الكلمة فيما بعد "ببرنامج إرلنجن" وعلى ضوئها صرح أن كل هندسة هي عبارة عن نظرية اللامتغيرات لتحويل زمرة محددة. وعن طريق تضييق أو توسيع الزمرة فإننا نستطيع أن ننتقل من هندسة إلى أخرى، فالهندسة الإقليدية هي دراسة اللامتغيرات لزمرة قياسية والهندسة الإسقاطية هي لتلك الزمر الإسقاطية. يعطينا تحويل الزمر تصنيفاً للهندسة وإن النظرية الجبرية واللامتغيرات التفاضلية لكل زمرة تمدنا بتركيب تحليلي للهندسة، وما تعريف كايلي الإسقاطي للقياسية (المترية) إلا اعتبار الهندسة القياسية ضمن إطار الهندسة الإسقاطية. يمنحنا "انضمام" المخروطيات اللامتغيرة في الهندسة الإسقاطية على مستوٍ ما هندسات لاإقليدية، وحتى التبولوجيا غير المعلوم نسبياً وجد مكانه المناسب باعتباره نظرية اللامتغيرات لتحويلات نقطة مستمرة.

أعطى كلاين في العام المنصرم مثالاً مهماً على نمط تفكيره عندما وضّح كيف يمكن تصور الهندسات اللاإقليدية باعتبارها هندسات إسقاطية حسب قياسية كايلي. أدى هذا التصريح إلى اعتراف كامل لنظريات بولاي

وَلوباتشفسكي المهجورة، وأصبح الآن تساوقها المنطقي مؤسساً على أكمل وجه. وإذا ما وجدت أخطاء منطقية في الهندسة اللاإقليدية فسرعان ما تكتشف في الهندسة الإسقاطية. هناك قلة من الرياضياتيين من يتقبل مثل هذه الهرطقة. غالباً ما استخدمت وأدت دوراً مهماً فكرة image "صورة (تطابق)" لمجال في الرياضيات مع مجال آخر في هندسة هلبرت البدهية axiomatic فيما بعد.

استطاعت نظرية الزمر أن تجعل تأليفه الأعمال الهندسية والجبرية لمونج وَبونسليه وَغاوس وَكايلي وَسليبش وَغراسمان وَريمان ممكنة. نظرية ريمان للفضاء من جانب قدّمت اقتراحات كثيرة متجسدة بالفعل في برنامج إرلنجن، والتي بالتالي ألهمت ليس فقط كلاين بل هلموتز وَلي أيضاً.

درس هلموتز Helmholtz مفهوم ريمان للفضاء (في 1868 و 1884) من منطلقين: البحث عن صورة هندسية لنظريته عن الألوان، والآخر التقصي في أصول قياساتنا العينية. قادت هذه الأمور إلى البحث في دراسة طبيعة البدهيات الهندسية وعلى وجه التحديد قياسات ريمان التربيعية. طوّر لي تكهنات هلموتز المتعلقة بطبيعة قياسات ريمان، وذلك بتحليل الطبيعة الكامنة في تحويلات الزمر (1890). وهذا بعينه "مسألة فضاء هلموتز - لي" التي تبرز أهميتها ليس في النظرية النسبية فحسب بل في نظرية الزمر والفسيولوجي أيضاً[1].

أعطى كلاين تحقيقاً لمفهوم ريمان حول الدوال العقدية في كتيبه المعنون Uber Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen لعام 1882[2] والذي أكّد فيه كيف تؤثر الاعتبارات الفيزيائية في الأنماط الملتوية في الرياضيات، وأوضح في Vorlesungen über das Ikosaeder لعام 1884[3] أن الجبر الحديث قادر على أن يعلم أشياءً كثيرة جديدة ورائعة عن الأجسام الأفلاطونية القديمة، كما نجد في هذا العمل دراسة لدوران الزمر للأجسام المنتظمة وعلاقتها بزمر غالوا للمعادلات الجبرية. وعبر دراسات شاملة قام بها كلاين مع تلامذته المتميزين طُبِّق مفهوم

1- H.Freudenthal, Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtzschen Raumprobems, "Math. Zeitschrift 63 (1956), pp.374-504.

2- ترجم إلى "حول نظرية ريمان للدوال الجبرية وتكاملاتها" من قبل Frances Hardcastle.

3- ترجم إلى "محاضرات حول المجسم العشروني" من قبل G.G.Morrice.

الزمرة على المعادلات التفاضلية الخطية والدوال المقاسية الناقصية (الإهليلجية) وَالأبيلية وإلى دوال "شاكلية تقابلية ذاتية (تذاكلية)" automorphic جديدة، والأخيرة نجدها شيقة وفي تنافس وديّ مع بوانكاريه.

أصبحت غوتنجن تحت انطلاقة قيادة كلاين مركزاً عالمياً للبحوث الرياضياتية بجانب تراثها المحصن من قبل غاوس وَدرخليه وَريمان حيث نجد رجالاً ونساءً من مختلف أصقاع العالم يلتقون لدراسة موضوعات خاصة كجزء مكمل للرياضيات ككل. أعطى كلاين محاضرات ملهمة من حيث تداول ملاحظاته على شكل كراسات، مما زوّد أجيالاً من الرياضياتيين بمعلومات متخصصة - وعلاوة على ذلك - وفهم حول وحدة علومهم، وبعد وفاة كلاين عام 1925 نشرت هذه المحاضرات في كتاب.

اكتشف سوفس لي عندما كان في باريس التحويل المتصل، وبهذا فكت أسرار الديناميك الهملتوني برمته باعتباره جزءاً من نظرية الزمر. وبعد عودته إلى النرويج عين أستاذاً في جامعة كرستينا وفيما بعد من 1886 إلى 1898 قام بالتدريس في جامعة ليبتزغ. كرس لي جل حياته بصورة منتظمة في دراسة التحويل المستمر للزمر ولامتغيراتها موضحاً أهميتها الأساسية باعتبارها تصنيفاً لمبادئ الهندسة والميكانيك والمعادلات التفاضلية العادية والجزئية. جمعت وصنفت نتائج أعمال لي في مجلدات ذات مستوى وبالتعاون مع تلامذته شيفر وَإنجل اللذين قاما بتدقيقها

Theorie der Transformationsgruppen, 1888-1893; Differentialgleichungen, 1891; Kontinuierliche Gruppen, 1893; Berührungstransformation, 1896

وأخيراً تم إثراء أعمال لي تحت تأثير الرياضياتي الفرنسي "إليه كارتان" Elie Cartan.

24

واجهت فرنسا كماً هائلاً من الرياضيات القادمة من ألمانيا وتسارع إنتاج الرياضياتيين المتميزين في جميع الحقول، والمشوق هنا أن نعقد مقارنة بين

الرياضياتيين الفرنسيين وزملائهم الألمان، نضع هرمت مع فيراشتراس وَداربو Darboux مع كلاين وَهادمارد Hadmard مع هلبرت وَبول تانيري مع مورتس كانتور. كان جوزيف لوفلي J.Liouville الرياضياتي البارز والأستاذ بكلية فرنسا في باريس في الفترة 1840-1860 مدرساً جيداً ومنتظماً ومحرراً للدورية Journal de mathématiques pures et appliquées لعدة سنوات. درس بأسلوب منتظم النظرية الحسابية للأشكال التربيعية لمتغيرين أو أكثر، كما تعبّر "مبرهنة لوفلي" في الميكانيك الإحصائي عن روح مثابرة وإنتاجية لمجال مختلف تماماً. قام لوفلي بتأسيس الأعداد المتعالية transcendental وبرهن في عام 1844 أن e و e^2 لا يمكن أن يكونا حلولاً للمعادلة التربيعية بالعوامل المنطقة. كانت هذه خطوة لسلسلة من المناقشات دار رحاها في برهان لمبرت Lambert لعام 1761 باعتبار النسبة التقريبية π عدد أصم أي غير منطق inrational ومن ثم برهان هرمت لعام 1873 باعتبار e عدداً متعالياً وأخيراً برهان لندمان أن π عدد متعالٍ (1882). طوّر لوفلي مع رفاقه الهندسة التفاضلية للمنحنيات والسطوح وحتى صيغ فرنت - سيريه Frenet-Serret لعام 1847 جاءت من حلقة لوفلي.

أصبح شارلز هرمت الأستاذ بالسوربون والمدرسة التقنية ممثلاً للتحليل الرياضياتي في فرنسا بعد وفاة كوشي عام 1857. تعد أعمال هرمت وكذلك لوفلي امتداداً لأعمال غاوس وَجاكوبي بالإضافة إلى صلتها بأعمال ريمان وَفيراشتراس. شدّت الانتباه مفاهيم مثل الدوال الإهليليجية والدوال المقاسية ودوال - ثيتا والعدد ونظرية اللامتغيرات، وخير شاهد على ذلك أسماء مثل "الأعداد الهرمتية" و "الأشكال الهرمتية"، كانت زمالة هرمت مع الرياضياتي الهولندي ستيلتجز Stieltjes محل تقدير، وبواسطة هرمت تبوأ ستيلتجز منصباً في تولوز وكان سنداً رائعاً لاكتشاف تكامل ستيلتجز وتطبيقات الكسور المستمرة إلى نظرية العزوم وكان هذا التقدير متبادلاً بينهما وعلى حد تعبير هرمت عندما كتب إلى صديقه قائلاً: Vous avez toujours raison et j'ai toujous tort[1]. تحتوي "المراسلات" (1905)

1- "انت دائماً على صواب وانا دائماً على خطأ".

المؤلفة من أربعة مجلدات بين هرمت وَستيلتجز أساساً على مادة غنية حول دوال المتغير العقدي.

استمر التقليد الهندسي الفرنسي بروعته في كتب وأوراق غاستون داربو البحثية، كان داربو هندسياً على نمط مونج يتناول المسائل الهندسية بدرجة تامة من الإتقان فيما يتعلق بالمعادلات التفاضلية ونظرية الزمر ويتطرق إلى مسائل الميكانيك بحدس نابض. كان داربو أستاذاً بكلية فرنسا ولأكثر من نصف قرن كان عضواً نشطاً في التدريس، وأكثر أعماله تألقاً وتأثيراً أعماله المؤلفة من أربعة أجزاء الموسومة Leçons sur la théorie générale des surfaces (1887-1896) والتي قدم فيها نتائج قرن من الأبحاث للهندسة التفاضلية للمنحنيات والسطوح. أصبحت المعادلات التفاضلية العادية والجزئية والميكانيك أيضاً في قبضة يد داربو الإدارية والتربوية وإن حدسه الهندسي المرهف وإتقانه الأساليب التحليلية واستيعابه لأعمال ريمان جعلته يتبوأ مكانة مرموقة في فرنسا كالتي يتمتع بها كلاين في ألمانيا.

يأتي الجزء الآخر من القرن التاسع عشر وهو عصر الكتب الدراسية الفرنسية الشاملة والرائعة في التحليل الرياضياتي وتطبيقاته والتي غالباً ما تظهر تحت مسمى Cours d'analyse كتبها رياضياتيون بارزون، وأكثرهم شهرة كتاب كاميل جوردان الموسوم Cours d'analyse من ثلاثة أجزاء (1882-1887) و Traité d'analyse لأميل بيكار من ثلاثة أجزاء (1891-1896) وأضيف إليهم عمل إدوارد غورساه E. Goursat من جزأين (1902-1905).

25

يعتبر هنري بوانكاريه أعظم رياضياتي فرنسي للنصف الثاني من القرن التاسع عشر، كان أستاذاً في السوربون بباريس من 1881 حتى وفاته 1912، لا يضاهيه أي رياضياتي آخر في عصره وذلك بما يتمتع به من رحابة آفاق موضوعاته الواسعة وقدرته على إثرائها جميعاً، في كل عام يحاضر في موضوع مختلف ولقد

حرر تلامذته هذه المحاضرات وغطت مجالات هائلة: نظرية الجهد وَالهيدروديناميك والميكانيك السماوي والديناميك الحراري والاحتمال؛ كل محاضرة تتمتع بطابع خاص وغاية في الروعة وجميعها تقدم أفكاراً قطفت ثمارها في أعمال آخرين بينما لا يزال الكثير بحاجة إلى الشرح والتقصي. وعلاوة على ذلك كتب بوانكاريه العديد من الأعمال العامة وشبه العامة والتي عن طريقها يحاول إعطاء فهم عام وواسع لقضايا الرياضيات المعاصرة، ومن بينها La valeur de la science (1951)[1] و La science et l'hypothése (1906)[2] وبصرف النظر عن هذه المحاضرات نشر بوانكاريه عدداً كبيراً من الأوراق البحثية حول ما يسمى "التذاكل automorphic" وَدوال فوشين Fuchsian والمعادلات التفاضلية والتبولوجيا وأسس الرياضيات، تناولها بأسلوب متقن ورائع وفهم كامل لكل ما يتعلق بجميع مجالات الرياضيات البحتة والتطبيقية، لا يضاهيه أي رياضياتي آخر في عصره سوى ريمان من حيث ما يمكن أن يقال للجيل الحالي.

يكمن السر في فهم أعمال بوانكاريه في تأملاته حول ميكانيك السماء وتحديداً مسألة الأجسام - الثلاثة (Les méthodes nouvelles de méchanique céleste, 3vol,1893). وهنا يبوح عن صلته المباشرة مع لابلاس، كما يوضح أيضاً أنه مع نهاية القرن التاسع عشر المسائل الميكانيكية القديمة المتعلقة بالكون لم تذهب سدى بالنسبة إلى إصرار الرياضياتي المنتج. وفيما يتعلق بهذه المسائل درس بوانكاريه المتسلسلات التباعدية وطوّر نظريته المتعلقة بالتمدد المتقارب التي قادته إلى دراسة تكامل اللامتغيرات واستقرار المسارات وأشكال الأجسام السماوية. وترتبط اكتشافات بوانكاريه الأساسية حول السلوك المحلي لتكامل منحنيات المعادلات التفاضلية القريبة إلى قيم الشواذ بميكانيك السماء، وكذلك سلوكها على المستوى الأكبر جميعها مرتبطة بأعماله حول الميكانيك السماوي، والوضع صحيح لدراساته وتحقيقاته عن الاحتمالات وهو مجال آخر

1- ترجم إلى "قيمة العلم" The Value of Science by G.B.Halsted.

2- ترجم إلى "العلم والفرضية" Science and Hypothesis اعيدت طباعته Dover, Inc, 1952.

فيه يشاطر لابلاس. لا يختلف بوانكاريه عن آويلر وَغاوس، ومهما اقتربنا منه فإننا نكتشف محاكاة الجدية والأصالة، وحتى نظرياتنا الحديثة المتعلقة بالنظرية النسبية وَالكوسمولوجيا والاحتمالات والتبولوجيا لها تأثير حيوي بفضل أعمال بوانكاريه.

26

يمثل رسورغمينتو Risorgimento ذكرى إحياء وطني لإيطاليا، بل إحياء للرياضيات الإيطالية بوجه عام. هناك العديد من مؤسسي الرياضيات الحديثة في إيطاليا الذين ساهموا في النضال من أجل تحرير بلادهم من النمسا وتوحيدها، وفيما بعد وفقوا في توحيد صف مكانتهم السياسية مع الاحتفاظ بمناصبهم المهنية. كان تأثير ريمان قوياً جداً وعبر أعمال كلاين وَسليبش وَكايلي تلقى الرياضياتيون الإيطاليون معارفهم للهندسة ونظرية اللامتغيرات، وهكذا أصبحت لهم اهتمامات في نظرية المرونة من منطلق هندسي رصين.

ومن ضمن مؤسسي المدرسة الإيطالية الرياضياتيون بروشي Brioschi وَكريمونا Cremona وَبيتي Betti. أصبح بروشي أستاذاً في جامعة بافيا وفي عام 1852 انضم إلى المعهد التقني في ميلانو وظل فيه حتى وفاته عام 1897، وهو مؤسس الدورية Annali di mathematica pura ed applicata (1858) وكما هو واضح من عنوانها تريد أن تضاهي دوريات كريل Crelle وَغيرغونيه Gergonne. في عام 1858 قام بروشي بزيارة الرياضياتيين البارزين الفرنسيين والألمان بصحبة بيتي وَكاسوراتي Casorati. صرح فولتيرا Volterra فيما بعد عن تأريخ هذه الجولة أنها "بمثابة وجود علمي لإيطاليا لكونها أمة"[1].

كان بروشي ممثلاً للنمط البحثي لكايلي - سليبش في اللامتغيرات الجبرية. أصبح لوجي كريمونا بعد عام 1873 مديراً لمدرسة الهندسة في روما، وتردد اسمه

1- V.Volterra, Bull. Am. Math. Soc., Vol 7 (1900), pp.60-2.

في التحويلات المنطقة الثنائية للمستوى والفضاء، أطلق عليها "تحويلات كريمونا" (1863-1865) وهو أحد مؤسسي الاستاتيك البياني.

شغل إيجنيو بلترامي Eugenio Beltrami تلميذ بروشي منصباً في جامعة بولونا وَبيزا وَبافيا وروما؛ أنجز عمله الرئيس في الهندسة بين عامي 1860 و 1870 عندما أدخلت معالمه التفاضلية حساب اللامتغيرات التفاضلية إلى نظرية السطوح. وإسهام آخر قام به بلترامي في تلك الفترة حول دراسته المسماة السطوح شبه الكروية وهي السطوح التي يكون فيها ثابت الانحناءات الغاوسية [نسبة إلى غاوس] سالباً. بإمكاننا أن نتحقق من شبه الكروية هذه ببعدين لهندسة بولاي اللاإقليدية، وهذا بعينه التفسير الإسقاطي لدى كلاين، أي الأسلوب الذي يوضح عدم وجود تناقض داخلي في الهندسة اللاإقليدية، لكن يبرز مثل هذا التناقض في نظرية السطوح العادية.

مع عام 1870 غدت أفكار ريمان سمة شائعة أكثر فأكثر عند جيل من الرياضياتيين الشبان، وقدر لنظريته عن الأشكال التفاضلية التربيعية أن تكون موضوعاً لورقتين للرياضياتيين الألمانيين كرستوفل E.B.Christoffel وَلبشتس R.Lipschitz في عام 1870. قدمت الورقة الأولى "رموز كرستوفل"، جمعت هذه الدراسات مع نظرية بلترامي للمعالم التفاضلية، وجلبت لغريغوريو ريجي - كورباستر Gregirio Ricci-Curbastro في بادو Padua المسمى حسابه التفاضلي المطلق (1884). هذا في حد ذاته رمزية لامتغيرة جديدة تم صوغها لتتعامل مع نظرية تحويلات المعادلات التفاضلية الجزئية وفي الوقت نفسه رمزية تصلح لنظرية الأشكال التفاضلية التربيعية.

لقد تطور الحساب التفاضلي المطلق على يد ريجي Ricci وبعض من طلابه أبرزهم توليو ليفي - سفتا Tullio Levi-Civita إلى ما نطلق عليه حالياً نظرية الموتر (التنسور) tensors. بإمكان نظرية الموتر هذه أن تعطي توحيداً لكثير من رمزية اللامتغيرات وقدرتها أيضاً على التعامل مع المبرهنات العامة في المرونة وفي الهيدروديناميك والنسبية، وتعود أصول مفردة الموتر إلى المرونة elasticity (W.Voigt,1900).

يعتبر لوجي بيانجي Luigi Bianchi واحداً من أكثر ممثلي الهندسة التفاضلية ألمعية في إيطاليا، ويقف عمله الموسوم (Lezioni di geometria differenziale 2nd, 3 (vol,1902-1909) بجانب كتاب داربو Théorie générale des surfaces باعتباره عرضاً كلاسيكياً لهندسة القرن التاسع عشر التفاضلية.

27

قدم ديفيد هلبرت D.Hilbert الأستاذ بجامعة غوتنجن إلى المؤتمر العالمي للرياضياتيين المنعقد في باريس عام 1900 قائمة من ثلاثة وعشرين مشروعاً بحثياً، في الوقت الذي تم الاعتراف بأعماله المتعلقة بالأشكال الجبرية، كما ألهم كتابه الشهير حول أسس الهندسة الصادر في 1900- Grudlagen der Geomtrie جوانب عدة لأعمال مورتس باش Moritz Pasch من غيسن Giessen الرائدة وتحديداً كتابه Vorlesungen über neuere Geometrie (1882)، حيث وسع باش أسس الهندسة بأسلوب بدهي (أكسيوماتي) من التفكير، وفي الوقت ذاته قاد فريجه إلى عمله الموسوم "أسس الحساب". حاول هلبرت في كتابه المذكور أن يعطي تحليلاً للبدهيات التي على أساسها تقوم الهندسة الإقليدية، كما شرح أيضاً قدرة البحوث الأكسيوماتية الحديثة في تطوير إنجازات الإغريق.

ففي خطابه لعام 1900 حاول هلبرت أن يستوعب اتجاهات البحث الرياضياتي في العقود السالفة يرسم الخطوط العريضة لأعمال إنتاجية في المستقبل[1]. تمدنا خلاصة مشاريعه نحو فهم جيد لمعنى رياضيات القرن التاسع عشر، كما تنحو أيضاً إلى تطلعات التطورات الرياضياتية للقرن العشرين.

يوضح برنامج هلبرت حيوية الرياضيات مع نهاية القرن التاسع عشر ويضعنا وجهاً لوجه بشدة مع النظرة التشاؤمية القائمة في القرن التاسع عشر، ويخبرنا الوقت الراهن أن بعضاً من مسائله المقترحة تم التوصل إلى حلول لها ولكن بقي

1- الترجمة موجودة في Bull. Am. Math. Soc., 2nd ser., Vol.8 (1901-02), pp.437-79.

الآخر في انتظار الحل. إن تطور الرياضيات بعد العام 1900 لم يخب ظن التوقعات التي تم إثارتها مع نهاية القرن التاسع عشر وحتى عبقرية هلبرت لم تستطع أن تتكهن ببعض التطورات الطارئة التي أخذت مكانها ولا تزال حتى اليوم لأن رياضيات القرن العشرين ستتهج مساراً جديداً ورائعاً.

ببليوغرافيا

الفصل الأول

Apart from the texts by Conant, Eels, Smith, Lietzmann, McGee, and Speiser already quoted, see:

Menninger, K. *Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahlen*, 2nd ed. 2 vols., Göttingen, 1957–58.
Struik, D. J. "Stone Age Mathematics." *Scientific American*, Vol. 179 (December, 1948), pp. 44–49.
Smith, D. E., and Ginsburg, J. *Numbers and Numerals*. New York Teachers' College, 1937.
Childe, Gordon. *What Happened in History*. Pelican Books, 1942.

Interesting patterns are described in:

Spier, L. "Plains Indian Parfleche Designs." *Univ. of Washington Publ. in Anthropology*, Vol. 4 (1931), pp. 293–322.
Deacon, A. B. "Geometrical Drawings from Malekula and Other Islands of the New Hebrides," *J. Roy. Anthrop. Institute*, Vol. 64 (1934), pp. 129–75.
Popova, M. "La géometrié dans la broderie bulgare." *Comptes Rendus, Premier Congrès des Mathématiciens des pays slaves* (Warsaw, 1929), pp. 367–69.

On the mathematics of the American Indians, see also:

Thompson, J. E. S. "Maya Arithmetic." *Contributions to Amer. Anthrop. and History*, Vol. 36, Carnegie Inst. of Washington Publ. No. 528 (1941), pp. 37–62.
Smith, D. E. *History of Mathematics*. Boston, 1923. Dover reprint, 2 vols. in 1, 1958. (See the extensive bibliography on p. 14.)

For the development of mathematical concepts in children, see:

Riess, A. *Number Readiness in Research*. Chicago, 1947.
Piaget, J. *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neufchâtel, 1941.
——. *Le développement des quantites chez l'enfant*. Neufchâtel, 1941.
Bunt, L. N. H. *The Development of the Ideas of Numbers and Quantity According to Piaget*. Groningen, 1951.

الفصل الثاني

The Rhind Mathematical Papyrus, T. E. Peet, ed. London, 1923.
The Rhind Mathematical Papyrus, A. B. Chace *et al.*, eds. 2 vols., Ohio, 1927–29. (Includes an extensive bibliography of Egyptian and Babylonian mathematics. See also the bibliography, mostly on ancient astronomy, in Neugebauer, *Exact Science in Antiquity*, Philadelphia, 1941, p. 18.)
Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Kunste in Moskau, W. W. Struve and B. A. Turajeff, eds. Berlin, 1930.

Neugebauer, O. *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, I. Vorgriechische Mathematik*. Berlin, 1934.
——. *Mathematische Keilschrift-Texte*. 3 vols., Berlin, 1935–37.

——. *The Exact Sciences in Antiquity*. Princeton, 1952; 2nd ed., 1957.
—— and Sachs, A. *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven, 1945.
Thureau-Dangin, F. "Sketch of a History of the Sexagesimal System." *Osiris*, Vol. 7 (1939), pp. 95–141.
——. *Textes mathématiques babyloniens*. Leiden, 1938.

There is some difference in the interpretation of Babylonian mathematics by the two preceding authors. An opinion is expressed in:

Gandz, S. "Conflicting Interpretations of Babylonian Mathematics," *Isis*, Vol. 31 (1940), pp. 405–25.

See also:

Bruins, E. M., and Rutten, M. *Textes mathématiques de Suse*. Paris, 1961.
Vogel, K. *Vorgriechische Mathematik*. 2 vols. Hanover-Paderborn, 1958–1959.

An older survey of pre-Greek mathematics is given in:

Archibald, R. C. "Mathematics Before the Greeks." *Science*, Vol. 71 (1930), pp. 109–21, 342. See also *ibid.*, Vol. 72 (1930), p. 36.
Smith, D. E. "Algebra of 4000 Years Ago." *Scripta mathematica*, Vol. 4 (1936), pp. 111–125.

On Indian mathematics, see the volumes of the *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* and:

Datta, B., and Singh, A. N. *History of Hindu Mathematics*. 2 vols., Lahore, 1935–38. [Reviewed by O. Neugebauer in *Quellen u. Studien*, Vol. 3B (1936), pp. 263–71.]
Gurjar, L. V. *Ancient Indian Mathematics and Vedha*. Poona, 1947. [See also *Math. Rev.*, Vol. 9 (1948), p. 73]
Kaye, G. R. "Indian Mathematics." *Isis*, Vol. 2 (1919), pp. 326–56.
Seidenberg, A. "The Ritual Origin of Geometry." *Arch. Hist. Exact Sciences*, Vol. 1 (1962), pp. 488–527.
Müller, C. "Die Mathematik der Súlvasūtra." *Abh. math. Seminar Univ. Hamburg*, Vol. 7 (1929), pp. 173–204.

On Chinese-Japanese mathematics see:

Mikami, Y. *The Development of Mathematics in China and Japan*. Leipzig, 1913.
Berezkina, E. I. "The Ancient Chinese Treatise 'Mathematics in Nine Chapters'." *Istoriko-mat. Issled.*, Vol. 10 (1957), pp. 423–584 (in Russian).
Needham, J. *Science and Civilization in China*. Cambridge, 1959. (See Vol. III, pp. 1–168.)
Haudricourt, A., and Needham, J. "La science Chinoise antique." In *Histoire général des Sciences* (Paris, 1957), Vol. I, pp. 184–201.

The I Ching or *Book of Changes*. Trans. by R. Wilhelm, New York, 1950; and by J. Legge, London, 1899 (Dover reprint, 1963).

On the nature of oriental society see the following and the Literature given in Chapter IV.

Wittfogel, K. A. "Die Theorie der orientalischen Gesellschaft." *Zeitschrift für Sozialforschung*, Vol. 7 (1938), pp. 90–122. Also "Le mode de production asiatique." *La Pensée*, Vol. 114 (1964), pp. 3–73.
Needham, J. "Science and Society in East and West." *Science and Society*, Vol. 28 (1964), pp. 385–408.

See further on Oriental mathematics:

van der Waerden, B. L. *Science Awakening*. 2nd ed., New York, 1961. (Trans. from the Dutch: Groningen, 1950.)

Neugebauer, O. *The Exact Sciences in Antiquity*. Princeton, 1952; 2nd ed., 1957.

الفصل الثالث

The Greek classical authors are available in excellent texts, with the principal texts also available in English translations. The best introduction is offered in the following books:

Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics*. 2 vols., Cambridge, 1912.

——. *A Manual of Greek Mathematics*. Oxford, 1931. Dover reprint, 1963.

——. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 3 vols., Cambridge, 1908. Dover reprint, 1956.

Ver Eecke, P. *Oeuvres complètes d'Archimède*. Brussels, 1921.

——. *Pappus d'Alexandrie. La Collection mathématique*. Paris-Brugge, 1933.

Ver Eecke, P. *Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre des elèments d'Euclide*. Brugge, 1948.

Dijksterhuis, E. J. *Archimedes*. Copenhagen, 1956.

Loria, G. *Le Scienze esatte nell' antica Grecia*, 2nd ed. Milan, 1914.

Allman, G. J. *Greek Geometry from Thales to Euclid*. Dublin, 1889.

Gow, J. *A Short History of Greek Mathematics*. Cambridge, 1884.

Reidemeister, K. *Die Arithmetik der Griechen*. Hamburg Math. Seminar Einzelschriften 26, 1939.

Reidemeister, K. *Das exakte Denken der Griechen*. Hamburg, 1959.

Cohen, M. R., and Drabkin, I. E. *A Source Book in Greek Science*. London, 1948.

Heath, T. L. *Mathematics in Aristotle*. Oxford, 1949.

Van der Waerden, B. L. *Ontwakende Wetenschap*. Groningen, 1950. English trans., *Science Awakening*, Oxford, 1961. (Deals with Egyptian, Babylonian and Greek mathematics.)

Becker, O. *Das mathematische Denken der Antike*. Göttingen, 1957.

Hauser, G. *Geometrie der Griechen von Thales bis Euclid*. Lucerne, 1955.

Blaschke, W. *Griechische und anschauliche Geometrie*. Munich, 1953.

Dantzig, T. *The Bequest of the Greeks*. New York, 1955.

Kolman, E. *History of Mathematics in Antiquity*. Moscow, 1961 (in Russian).

Wussing, H. *Mathematik in der Antike*. Leipzig, 1965. (The books of Kolman and Wussing also deal with Egyptian and Babylonian mathematics.)

Steele, A. D. Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik." *Quellen und Studien*, A2 (1932), pp. 61–89.

Comparative Greek, Latin, and English texts are in:

Thomas, I. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge, Mass.–London, 1939.

Further text criticism is given in:

Tannery, P. *Pour l'histoire de la science hellène*, 2nd ed. Paris, 1930.

Tannery, P. *Mémoires scientifique*. Vols. 1–4, Toulouse–Paris, 1912–20.

Vogt, H. "Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4ten Jahrhunderts." *Bibliotheca mathematica*, Vol. 3, No. 10 (1909–10), pp. 97–105.

Sachs, E. *Die fünf Platonischen Körper*. Berlin, 1917.

Hellen, S. "Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreen," *Abh. Deutsch. Akad. Wiss., Kl. f. Math. u. Physik u. Techn.*, No. 6 (1958).

Frank, E. *Plato und die sogenannten Pythagoreer.* Halle, 1923.
Apostle, H. O. *Aristotle's Philosophy of Mathematics.* Chicago, 1952.
Luria, S. "Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten." *Quellen und Studien*, B 2 (1932), pp. 106–85.
Lorenzen, P. *Die Entstekung der exakten Wisenschaften.* Berlin, 1960.

A good critical survey of the various hypotheses concerning Greek mathematics is given in:

Dijksterhuis, E. *De elementen van Euclides.* 2 vols., Groningen, 1930 (in Dutch).

On Zeno's paradoxes, see:

Van der Waerden, B. L. "Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik." *Math. Annal.*, Vol. 117 (1940), pp. 141–61.
Cajori, F. "The History of Zeno's Arguments on Motion." *Amer. Math. Monthly*, Vol. 22 (1915), 8 articles. Also see, *Isis*, Vol. 3 (1920–21), pp. 7–20.

On the relation of Greek to Oriental astronomy, see:

Neugebauer, O. "The History of Ancient Astronomy. Problems and Methods." *J. Near Eastern Studies*, Vol. 4 (1945), pp. 1–38.

الفصل الرابع

The reader is referred to the references following Chapter II, in addition to the following.

Juschkewitsch, A. P. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter.* Leipzig, 1964. (Translation from the Russian, Moscow, 1961.)
[Vogel, K.] *Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus.* Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern. Aalen, 1963.
Suter, H. *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke.* Leipzig, 1900 (Suppl., 1902). (Also see H. P. J. Renaud, *Isis*, Vol. 18 (1932), p. 126.)
Kasir, D. S. *The Algebra of Omar Khayyam.* New York, 1931, p. 126.
Khayyam, Omar. *Traktaty.* Moscow, 1961 (in Russian). (Trans. by B. A. Rozenfel'd, with photostats of the Arabic texts.)
Al-Kashi, J. *The Key to Arithmetic, Treatise on the Circle.* Moscow, 1956 (in Russian). (Trans. by B. A. Rozenfel'd.)
Luckey, P. *Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī.* Wiesbaden, 1951. Also in *Abhandl. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Klasse für Math. 1950*, No. 6 (1953).
Luckey, P. "Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik." *Math. Annal.*, Vol. 20 (1948), pp. 217–74.
Juschkewitsch, A. P., and Rozenfel'd, B. A. "Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter." *Sowjetische Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaft*, Berlin (1960), pp. 62–160.
Ling Wang, and Needham, J. "Horner's Method in Chinese Mathematics." *T'oung Pao, Leiden*, Vol. 43 (1955), pp. 345–401.
Datta, B. *The Science of the Sulba, a Study in Early Hindu Geometry.* London, 1932.
Smith, D. E., and Karpinski, L. C. *The Hindu-Arabic Numerals.* Boston, 1911.
Karpinski, L. C. *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khwārizmī.* New York, 1915.
Hayashi, T. "A Brief History of the Japanese Mathematics." *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2nd ser., Vol. 6 (1904–05), pp. 296–361.

Smith, D. E. "Unsettled Questions Concerning the Mathematics of China." *Scientific Monthly*, Vol. 33 (1931), pp. 244–50.

Colebrooke, H. T. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhāscara.* London, 1817. 2nd ed. (revised by H. C. Banerji), Calcutta, 1927.

Rosen, F. *The Algebra of Mohammed ben Musa.* London, 1831. [Also see S. Gandz, *Quellen und Studien*, Vol. 2A (1932), pp. 61–85.]

Clark, W. E. *The Aryabhatya of Aryabhata.* Chicago, 1930.

الفصل الخامس

For the spread of Hindu-Arabic numerals in Europe, see:

Smith, D. E., and Karpinski, L. C. *The Hindu-Arabic Numerals.* Boston-London, 1911.

For speculative mathematics in the Middle Ages, see:

Boyer, C. B. *The History of the Calculus.* New York, 1949. Dover reprint, 1959. (See Chapter III.)

Sixteenth- and seventeenth-century Italian mathematics is discussed in a series of papers:

Bortolotti, E. A series of papers written between 1922–28, e.g., in *Periodico di matematica*, Vol. 5 (1925), pp. 147–84; *ibid.*, Vol. 6 (1926), pp. 217–30; *ibid.*, Vol. 8 (1928), pp. 19–59; *Scientia* (1923), pp. 385–94.

——. *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari, e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche.* Imola, 1926.

Cardano's autobiography has been translated:

Cardano, J. *The Book of My Life.* London, 1931. Dover reprint, 1962. (Translation by J. Stoner.)

See also:

Ore, O. *Cardano, the Gambling Scholar.* Princeton, 1953. Dover reprint, 1965.

Much information about sixteenth- and seventeenth-century mathematicians and their works is given in the papers of H. Bosmans, S.J., most of which can be found in the *Annales de la Société Scientifique Bruxelles*, 1905–27. [A complete list is given by A. Rome in *Isis*, Vol. 12 (1929), p. 88–112.]

Futhermore, see:

Carslaw, H. S. "The Discovery of Logarithms by Napier." *Math. Gazette*, Vol. 8 (1915–16), pp. 76–84, 115–19.

Blaschke, W., and Schoppe, G. *Regiomontanus, Commensurator.* Berlin, 1956.

Napier Tercentenary Memorial Volume, C. G. Knott, ed. London-New York, 1915.

Zinner, E. *Leben und Wirken des Johannes Müller von Königsberg genannt Regiomontanus.* Munich, 1938.

Bond, J. D. "The Development of Trigonometric Methods Down to the Close of the Fifteenth Century." *Isis*, Vol. 4 (1921–22), pp. 295–323.

Yeldham, F. A. *The Story of Reckoning in the Middle Ages.* London, 1926.

Dijksterhuis, E. J. *Simon Stevin.* The Hague, 1943.

Stevin, Simon. *The Principal Works.* 4 vols., Amsterdam, 1955–64.

Von Cues, Nikolaus. *Mathematische Schriften.* Hamburg, 1952. (Trans. and ed. by J. and J. E. Hofmann.)

Thorndike, L. *The Sphere of Sacrobosco.* Chicago, 1949.

Oresme, Nicole. *Quaestiones Super Geometriam Euclidis.* Leiden, 1961. (H. L. L. Busard, ed.)

Geyer, B. "Die mathematischen Schriften des Albertus Magnus." *Angelicus*, 35 (1958), pp. 159–75.
Thomas of Bradwardine. *Tractatus de Proportionibus*, H. L. Crosby, ed. Madison, Wis., 1955.
Bodewig, E. "Die Stellung des heiligen Thomas von Aquino zur Mathematik." *Arch. f. die Geschichte der Philosophie*, Vol. 11 (1931), pp. 1–34.
Hofmann, J. E. "Ueber Viète's Beiträge zur Geometrie der Einschiebungen." *Math-physik*, Semesterberichte 8 (1962), pp. 191–214.
Taylor, E. G. R. *The Mathematical Practitioners of Tudor and Stuart England.* Cambridge, 1954.
Voelling, E. "Jost Bürgi und die Logarithmen." In *Elemente der Mathematik*, Suppl. 5, Basel, 1948.
Treutlein, P. "Das Rechnen im 16. Jahrhundert." *Abhandl. zur Geschichte der Mathematik*, 1 (1877), pp. 1–100.
——. "Die deutsche Coss." *Ibid.*, 2 (1879), pp. 1–124.
Clagett, M. *The Science of Mechanics in the Middle Ages.* Madison, Wis.–London, 1959.
——. *Archimedes in the Middle Ages.* Madison, Wis., 1964, Vol. I.
Sarton, G. *Six Wings: Men of Science of the Renaissance.* Bloomington, Ind., 1957.
Averdunk, H., and Müller Reinhard, J. *Gerhard Mercator.* In *Petermanns Mitteilungen*, Ergänzungsheft 182. Gotha, 1914, 100 pp.
Davis, N. Z. "Sixteenth Century French Arithmetics and the Business Life." *J. Hist. of Ideas*, Vol. 21 (1960), pp. 18–48.

الفصل السادس

The collected works of Kepler, Galileo, Descartes, Pascal, Huygens, and Fermat are available in modern editions; those of Newton and Leibniz, only in part.

For the discovery of the calculus, see:

Boyer, C. B. *The History of the Calculus.* New York, 1949. Dover reprint, 1959. (Contains a large bibiliography.)

On the historical-technical background, see:

Grossman, H. "Die gesellschaftlichen Grundlagen der mechanistischen Philosophie und die Manufaktur." *Zeitschrift für Sozialforschung*, Vol. 4 (1935), pp. 161–231.
Merton, R. K. "Science, Technology and Society in the Seventeenth Century." *Osiris*, Vol. 4 (1938), pp. 360–62; also *Science and Society*, Vol. 3 (1939), pp. 3–27.

On the leading mathematicians, see:

Cajori, F. *William Oughtred.* Chicago-London, 1916.
Scott, J. F. *The Mathematical Works of John Wallis D.D., F.R.S.* London, 1938.
Prag, A. "John Wallis, Zur Ideengeschichte der Mathematik im 17. Jahrhundert." *Quellen und Studien*, Vol. 1 (1930), pp. 381–412. [Also see T. P. Nunn, *Math. Gazette*, Vol. 5 (1910–11).]
Barrow, I. *Geometrical Lectures.* Chicago, 1916. (Trans. and ed. by J. M. Child.)
Bell, A. E. *Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century.* London, 1947.
More, L. T. *Isaac Newton. A Biography.* New York-London, 1934. Dover reprint, 1962.

Newton, I. *Principia*. Univ. of California, 1934. (English ed. by F. Cajori.)

Newton's correspondence is currently being published:

Correspondence of Isaac Newton, H. W. Turnbull, ed. 3 vols., Cambridge, 1959–1961.

Collections of papers on Newton have been published by the History of Science Soc. (Baltimore, 1928), the Math. Assoc. (London, 1927), and by the Royal Soc. (Cambridge, 1947).

Turnbull, H. W. *The Mathematical Discoveries of Newton*. Glasgow, 1954.

Beth, H. J. E. *Newton's 'Principia'*. 2 vols., Groningen, 1932 (in Dutch).

Child, J. M. *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago, 1920. (Trans. from the Latin texts.)

Johann Kepler. A Tercentenary Commemoration of His Life and Works. Baltimore, 1931.

Milhaud, G. *Descartes savant*. Paris, 1921.

Hofmann, J. E. *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizchen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672–1676)*. Munich, 1949. (Other studies by Hofmann on seventeenth-century mathematicians include those on N. Mercator [*Deut. Math.*, Vol. 3 (1939); Vol. 5 (1940)]; Grégoire de Saint-Vincent [*Abh. Preuss. Akad. Wiss., Math. Naturw. Klasse*, No. 31 (1941)]; Fermat [*Ibid.*, No. 7 (1944)]; and on the priority struggle between Newton and Leibniz [*Ibid.*, No. 2 (1944)]. Vgl. the bibliographical data in his *Geschichte der Mathematik*, 3 vols., Berlin, 1953–57. Also, *Frans van Schooten der Jüngere*. Wiesbaden, 1962.)

Bosmans, H. (see p. 96) has papers on: Tacquet [*Isis*, Vol. 9 (1927–28), pp. 66–83], Stevin [*Mathesis*, Vol. 37 (1923); *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, Vol. 37 (1913), pp. 171–99; *Biographie nationale de Belgique*], Della Faille [*Mathesis*, Vol. 41 (1927), pp. 5–11], De Saint-Vincent [*Mathesis*, Vol. 38 (1924), pp. 250–56].

Toeplitz, O. *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I*. Berlin, 1949.

Taton, R. *L'oeuvre mathématique de G. Desargues*. Paris, 1951.

James Gregory, A Tercentenary Memorial, H. W. Turnbull, ed. London, 1939. [Cf. M. Dehn and E. D. Hellinger, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 50 (1943), pp. 149–63.]

Scriba, C. J. *James Gregorys frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung*. Mitt. aus dem math. Seminar Giessen, 55 (1957), 80 pp.

Haas, K. "Die mathematischen Arbeiten von Johannes Hudde." *Centaurus*, Vol. 4 (1956), pp. 235–84.

Fellman, E. A. "Die mathematischen Werke von Honoratius Fabri." *Physis*, Vol. 1 (1959), pp. 1–54.

Whiteside, D. T. "Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century." *Arch. Hist Exact Sci.*, Vol. 1 (1961), pp. 179–388.

Tannery, Paul. "Notions Historiques." In *Notions de mathématiques*, J. Tannery, ed. Paris, 1903, pp. 324–48.

Montel, P. *Pascal mathématicien*. Paris, 1951.

Fleckenstein, J. O. *Die Prioritätsstreit Zwischen Leibniz und Newton*. Basel–Stuttgart, 1956.

Struik, D. J. *Het land van Stevin en Huygens*. Amsterdam, 1958 (in Dutch).

The works of Lagrange and Laplace are available in modern editions; those of Euler are nearing completion in a monumental edition, many volumes containing important introductions. The edition of all the works of the Bernoullis is in preparation; thus far we only have an edition of Jacob's work (1744, 2 vols.), and of Johann's work (1742, 4 vols.), and one modern volume of letters.

Bernoulli, J. *Briefwechsel I.* Basel, 1955.
Lambert, J. H. *Opera mathematica.* 2 vols., Berlin, 1946. (Vol. 1, pp. ix–xxxi, contains a preface by A. Speiser.)
Cajori, F. *A History of the Conception of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse.* Chicago, 1931.
Jourdain, P. E. B. *The Principle of Least Action.* Chicago, 1913.
DuPasquier, L. G. *Léonard Euler et ses amis.* Paris, 1927.
Spiess, O. *Leonhard Euler.* Frauenfeld-Leipzig, 1929.
Leonard Euler, *Collection of Articles in Honour of the 250th Anniversary of His Birth.* Moscow, 1958 (in Russian). [See also articles in *Istor. Mat. Issled,* Vol. 7 (1954), pp. 451–640 (in Russian). Also, *A Collection of Articles Published at the Occasion of the 150th Anniversary of Euler's Death,* Moscow-Leningrad, 1935 (in Russian).]
Euler, L. *Vollständige Anleitung zur Algebra,* J. E. Hofmann, ed. Reclam, Stuttgart, 1959 (with historical introduction).
Fleckenstein, J. O. "Johann und Jakob Bernoulli." In *Elemente der Mathematik,* Suppl. 7, Basel, 1949.
Hofmann, J. E. "Über Jakob Bernouilli's Beiträge zur Infinitesimalmathematik." *Einseignment mathématique,* 2nd ser., 5 (1956), pp. 61–171.
Andoyer, H. *L'oeuvre scientifique de Laplace.* Paris, 1922.
Loria, G. "Nel secondo centenario della nascita di G. L. Lagrange." *Isis,* Vol. 28 (1938), pp. 366–75. (Contains full bibliography.)
Auchter, H. *Brook Taylor der Mathematiker und Philosoph.* Marburg, 1937. (Shows from data in Leibniz' manuscripts that Leibniz had the Taylor series by 1694. James Gregory already possessed it in 1671.)
Green, H. G., and Winter, H. J. J. "John Landen, F.R.S. (1719–90), Mathematician." *Isis,* Vol. 35 (1944), pp. 6–10.
[Bayes, Th.] Facsimile of Two Papers, with commentaries by E. C. Molina and W. E. Deming. Washington, D.C., 1940.
Pearson, K. "Laplace." *Biometrica,* Vol. 21 (1929), pp. 202–16.
Stäckel, P. "Zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert." *Bibliotheca mathematica,* Vol. 3, No. 2 (1901), pp. 111–21.
Nielsen, N. *Geomètres français du dix-huitième siècle.* Copenhagen-Paris, 1935.
Les oeuvres de Nicolas Struyck (1687–1769), qui se rapportent au calcul des chances, J. A. Vollgraf, ed. Amsterdam, 1912.
Sarton, G. "Montucla." *Osiris,* Vol. 1 (1936), pp. 519–67.
Maystrov, L. E. "Lomonossov, Father of Russian Mathematics." *The Soviet Review,* Vol. 3, No. 3 (1962), pp. 3–18. [Trans. from *Voprosy Filosofii,* Vol. 5 (1961).]
Scott, J. F. "Mathematics Through the Eighteenth Century." *Philos Mag.,* Commemoration Number (1948), pp. 67–90. (The stress is on England.)
Truesdell, C. *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1630–1780.* In Euler's *Opera Omnia,* 2nd ser., Vol. 11, Zurich, 1960. [Other important introductions to Euler's *Opera Omnia* are those by G. Faber on infinite series (1st ser., Vol. 16, 1935); G. Faber and A. Krazer on integrals (1st ser., Vol. 19, 1932); C. Caratheodory on variational calculus (1st ser., Vol. 24, 1952); A. Speiser on geometry (1st ser., Vols. 26–29, 1953–56); and J. O. Fleckenstein on mechanics (2nd ser., Vol. 5, 1957).]

The best history of nineteenth-century mathematics is:

Klein, F. *Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, II.* Berlin, 1926–27. (English translation of Part I with appendices, Brookline, Mass., 1979.)

A bibliography of leading nineteenth-century mathematicians is given in:

Sarton, G. *The Study of the History of Mathematics.* Cambridge, Mass., 1936, pp. 70–98. (Lists biographies and editions of collected works for all the chief mathematicians of the nineteenth and twentieth centuries. Further bibliographical material is given in the issues of *Scripta mathematica*, 1932–present.)

Furthermore, see:

de Launay, L. *Monge. Fondateur de l'École Polytechnique.* Paris, 1934.

Taton, R. *Monge.* Paris, 1951. (Shortened version in *Elemente der Mathematik*, Suppl. 49, Basel, 1950.)

Dunnington, G. W. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science.* New York, 1956.

Gauss, C. F. *Gedenkband anlässlich des 100. Todestages*, ed. H. Reichardt. Leipzig, 1957.

Klein, F. *Materialen für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss.* 8 vols., Leipzig, 1911–20.

Worbs, E. *Carl Friedrich Gauss: Ein Lebensbild.* Leipzig, 1955.

Quaternion Centenary Celebration. *Proc. Roy. Irish Acad. A*, Vol. 50 (1945), pp. 69–98. (Among the articles is "The Dublin Mathematical School in the First Half of the Nineteenth Century," by A. J. McConnell.)

"A Collection of Papers in Memory of Sir William Rowan Hamilton." *Scripta mathematica Studies*, New York, 1951.

Kötter, E. "Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf von Staudt." *Jahresber. Deut. Math. Verein*, Vol. 5 (1901), pp. 1–486.

Black, M. *The Nature of Mathematics.* New York, 1934. (Contains a bibliography on symbolic logic.)

Kagan, V. F. *Lobačevskiĭ.* Moscow and Leningrad, 1945 (in Russian). (French translation, Moscow, 1974.) (See I. Toth, *HM*, Vol. 6 (1979), pp. 91–97.)

One Hundred Five and Twenty Years of Non-Euclidean Geometry of Lobačevskiĭ. A. P. Norden, ed. Moscow and Leningrad, 1952 (in Russian.)

Merz, J. T. *A History of European Thought in the Nineteenth Century.* 4 vols., London, 1903–14.

Hadamard, J. *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton, 1945. Dover reprint, 1954.

Prasad, G. *Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century: Their Lives and Their Works.* 2 vols., Benares, 1933–34.

Struik, D. J. "Outline of a History of Differential Geometry." *Isis*, Vol. 19 (1933), pp. 92–120; *ibid.*, Vol. 20 (1934), pp. 161–91.

Coolidge, J. L. "Six Female Mathematicians." *Scripta math.*, Vol. 17 (1951), pp. 20–31. (Concerning Hypatia, M. G. Agnesi, E. du Châtelet, M. Somerville, S. Germain, and S. Kovalevsky.)

Kovalevsky, Sonja. *Her Recollections of Childhood.* New York, 1895. (Trans. from the Russian by I. F. Hapgood. Contains also the biography by A. C. Leffler, from the Swedish [1892], which exists in other translations, e.g., one in German in the Reclam ed., Leipzig.)

In Remembrance of S. V. Kovalevskaya. A Collection of Essays. Moscow, 1951 (in Russian). (See also *Istor.-mat. Issled.*, Vol. 7 [1954], pp. 666–715.)

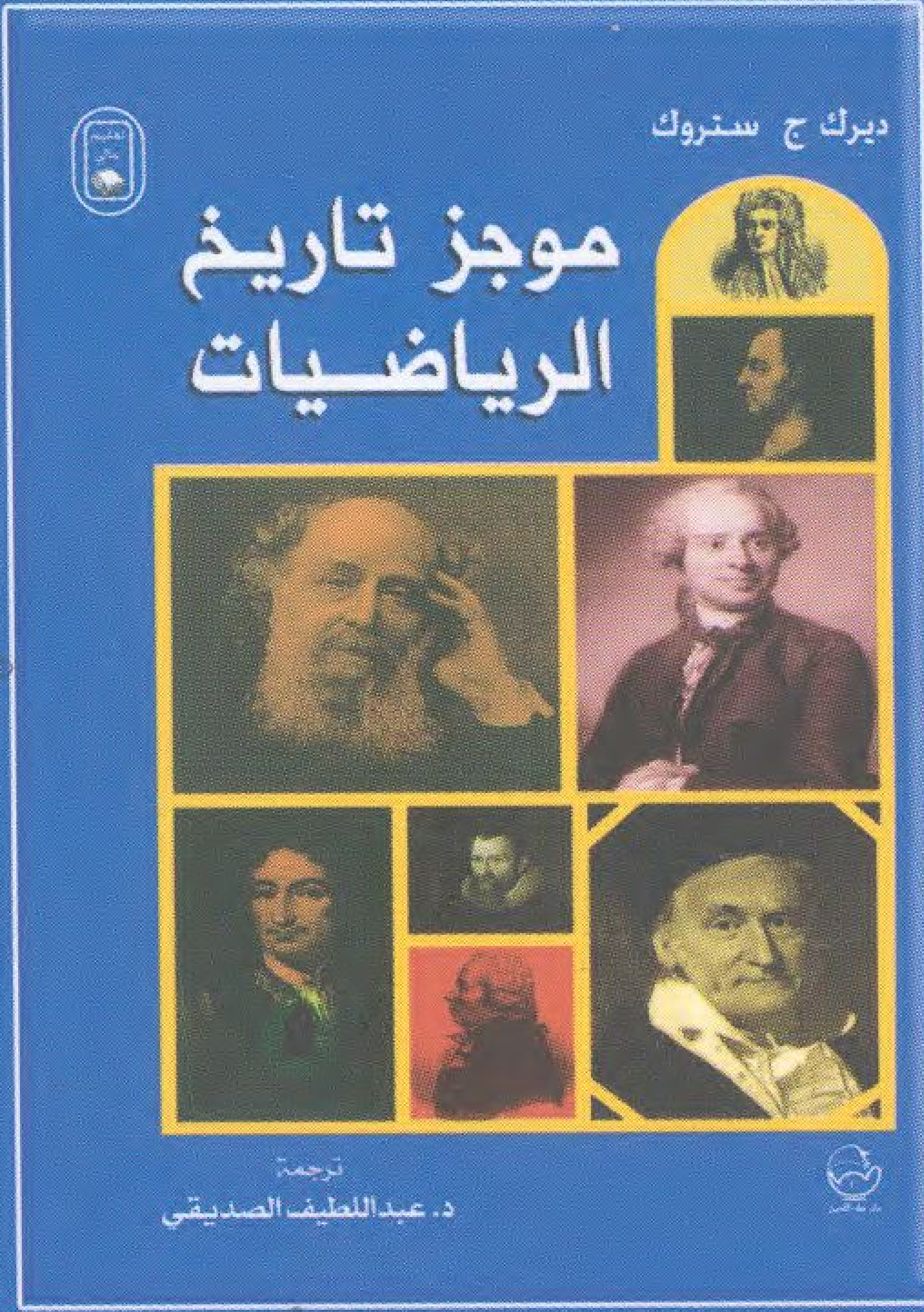
Wheeler, L. P. *Josiah Willard Gibbs.* New Haven, 1951.

Kollros, L. "Jakob Steiner." In *Elemente der Mathematik*, Suppl. 7, Basel, 1947.

Winter, E. *B. Bolzano und sein Kreis.* Leipzig, 1933; Halle, 1949.

Kolman, E. *Bernard Bolzano.* Berlin, 1963.

Ore, O. *Niels Henrik Abel. Mathematician Extraordinary*. Minneapolis, 1957.
Infeld, L. *Whom the Gods Love*. New York, 1948. (A novel about Galois.)
Dalmas, A. *Évariste Galois révolutionnaire et géomètre*. Paris, 1956.
Biermann, K. R. "J. P. G. Lejeune Dirichlet, Dokumente für sein Leben und Wirken." *Abh. Deutsch. Akad. Wiss., Klass für Math.*, No. 2 (1959), pp. 1–68.
——. "Der Mathematiker Ferdinand Minding und die Berliner Akademie." *Monatsberichte Deutsch. Akad. Wiss.*, 3 (1961), pp. 120–33.
Medvedev, F. A. *The Development of the Theory of Sets in the 19th Century*. Moscow, 1965 (in Russian).
——. *The Development of the Concept of Integral*. Moscow, 1974 (in Russian). (See *HM*, Vol. 6 [1979], pp. 85–90.)
Manning, K. "The Emergence of the Weierstrassian Approach to Complex Analysis." *AHES*, Vol. 14 (1975), pp. 297–383.
[Kolmogorov, A. N., and Juškevič, A. P., eds.] *Mathematics of the 19th Century: Mathematical Logic, Algebra, Theory of Numbers, Theory of Probability*. Moscow, 1978 (in Russian).
Scholz, E. *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*. Boston, etc., 1980.
Biermann, K. R. *Gotthold Eisenstein*. Crelle 214/251 (1964), p. 1920.
Dugac, P. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Paris, 1976.
——. "Eléments d'analyse de Karl Weierstrass." *AHES*, Vol. 10 (1973), pp. 41–176. (Bibliography, pp. 297–383.)
I. Grattan-Guinness. *The Development of the Foundation of Mathematics from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass., 1970.
Herivel, J. *Joseph Fourier, the Man and the Physicist*. Oxford, 1975. (Cf. I. Grattan-Guinness, *Annals of Science*, Vol. 32 [1975], pp. 503–14.)
Dauben, J. W. *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge, Mass., 1979. (See also P. E. B. Jourdain, *Arch. Math. Phys.*, Vol. 3, pp. 10, 14, 16, 22.)
Rozenfel'd, B. A. *History of Non-Euclidean Geometry*. Moscow, 1976 (in Russian). (See *HM*, Vol. 6 [1979], pp. 460–64.)
Morrison, P. and E. *Babbage's Calculating Machine or Differential Engine*. New York, 1965.
Grabiner, J. V. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge, Mass., and London, 1981.
[Rüdenberg, L., and Zassenhaus, H., eds.] *Hermann Minkowski: Briefe an David Hilbert*. Berlin, etc., 1973. (The letters from Hilbert to Minkowski have not [yet?] been recovered.)
Reid, C. *Hilbert*. New York, 1970.
Métivier, M., Costabel, P., and Dugac, P. *Siméon-Denis Poisson et la science de son temps*. Paris, 1981.
Marx, K. *Matematičeskie Rukopisi*. Moscow, 1968. (Karl Marx's mathematical manuscripts, German with Russian translation and commentary.)
Kennedy, H. C. "Karl Marx and the Foundations of the Differential Calculus." *HM*, Vol. 4 (1977), pp. 303–18. (See also *Science and Nature*, Vol. 1 [1978], pp. 59–62.)
Bos, H. J. M., and Mehrtens, H. "The Interactions of Mathematics and Society in History. Some Explanatory Remarks." *HM*, Vol. 4 (1977), pp. 7–30, with extensive bibliography.



A Concise History of Mathematics

إن تاريخ الرياضيات هو في واقع الأمر تاريخ الإنسانية بأسرها. وقد يمتد هذا التاريخ إلى أكثر من عشرة آلاف عام، وهو العمر المقدر للحضارة البشرية.

يرسم هذا الكتاب بإيجاز تاريخ الرياضيات منذ بداياته، بل وتاريخ المجتمعات التي أفرزت هذه الرياضيات. ولابد للرياضياتي من أن يكون ملماً بهذا التاريخ الذي يحمل بين طياته حلولاً لألغاز رياضية كثيرة.

فالمؤلف إذاً يغوص في عمق التاريخ، ويستعرض الأحدا
ويتتبعها، كي يعطي المعلومة الرياضياتية، ويقترح ما يمك
اقتراحه، ثم يخرج الحقيقة الرياضياتية، وهنا تكمن
الكتاب. وأسلوبه المتقن والسلس يجعل القارئ يسبح في
الرياضيات تارة، ويغوص في أعماقها تارة أخرى، وهذه
أخرى سيجدها القارئ في الكتاب.

يطلب الكتاب على العنوان التالي: دار علاء الدين للنشر والطباعة والتوزيع - سورية - دمشق
ص.ب. ٣٠٥٩٨ - هاتف ٥٦١٧٠٧١ - فاكس ٥٦١٣٢٤١ - بريد إلكتروني ala-addin@mail.sy